3.º Ano

Números e Operações

Números naturais

Operações com números naturais

Números racionais não negativos

Fátima Mendes
Joana Brocardo
Catarina Delgado
Fátima Gonçalves

3.º Ano

Números e Operações

Números naturais

Relações Numéricas

Múltiplos e divisores

Operações com números naturais

Multiplicação

Divisão

Números racionais não negativos

Fracções

Decimais

Fátima Mendes

Joana Brocardo

Catarina Delgado

Fátima Gonçalves

2010

Arranjo gráfico:

Mário Baía

Nesta publicação foram utilizadas e adaptadas imagens de ARTHUR'S BOYS & GIRLS CLIPART (http://www.arthursclipart.org/children/togethercol.htm)

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

O aprofundamento da compreensão do sistema de numeração decimal tem especial ênfase no 3.º ano de escolaridade. Por um lado, e no que diz respeito aos números naturais, os alunos têm a oportunidade de realizar tarefas cujo propósito é o estabelecimento de relações entre os números, identificando, nomeadamente, múltiplos e divisores de um número, utilizando números cada vez maiores. Por outro lado, é no 3.º ano que o estudo dos números racionais não negativos vai ser aprofundado. De facto, nos dois primeiros anos estes são trabalhados de modo intuitivo, assumindo especial relevância, nesta altura, a introdução de números representados na sua forma decimal ou recorrendo à sua representação na forma de fracção. Este trabalho deve ser feito recorrendo a problemas onde surjam diferentes significados das fracções e onde faça sentido recorrer à representação decimal de números racionais.

No 3.º ano o trabalho em torno dos números e das operações centra-se nas operações multiplicação e divisão, uma vez que nos dois primeiros anos, o desenvolvimento do sentido de número esteve mais relacionado com as características dos números, as relações entre eles, as operações adição e subtracção e as suas propriedades. Ainda que de um modo informal e no contexto da resolução de problemas, o desenvolvimento de aspectos do sentido de número associados à multiplicação e à divisão estão presentes desde o 1.º ano de escolaridade, mas é a partir do 2.º ano e sobretudo no 3.º ano que são formalizados e aprofundados os aspectos mais relacionados com a compreensão destas operações e das suas propriedades.

As sequências de tarefas aqui apresentadas assentam na importância da interligação entre tópicos e temas. Assim, apesar de estar indicado o tópico no qual se foca mais especificamente cada uma das tarefas, estas proporcionam também a exploração de outros tópicos inter-relacionados. Por exemplo, nas tarefas de Multiplicação são também abordados aspectos relacionados com o tópico Regularidades.

Números naturais: Relações numéricas e Múltiplos e divisores

O conjunto de tarefas associadas aos tópicos Relações numéricas e Múltiplos e divisores tem como propósito o aprofundamento do sistema de numeração decimal, proporcionando aos alunos o trabalho com números cada vez maiores e o estabelecimento de relações entre os diferentes números. Algumas das tarefas propostas têm como ponto de partida contextos do dia-a-dia desafiantes para os alunos, a propósito dos quais estes lidarão com números da ordem de grandeza dos milhares e dos milhões. Outras tarefas, partindo tanto de contextos do dia-a-dia como de contextos matemáticos, têm como propósito possibilitar o estabelecimento de relações entre os números que conduzam à identificação e compreensão do conceito de múltiplo e divisor de um número natural. Estes tópicos estão interligados, naturalmente, com os tópicos relativos às operações multiplicação e divisão de números naturais.

Operações com números naturais: Multiplicação e Divisão

As sequências de tarefas propostas têm como pano de fundo o desenvolvimento de aspectos fundamentais relacionados com as operações multiplicação e divisão que estão claramente expressos no programa de Matemática. No que diz respeito à operação divisão esta é abordada privilegiando a sua relação com a multiplicação.

Um aspecto a que se dá ênfase diz respeito à compreensão, construção e memorização das tabuadas do 8, 9, 7, 11 e 12, usando o conhecimento sobre as aprendidas e memorizadas no 2.º ano. Um outro aspecto que deve ser desenvolvido é a resolução de problemas de multiplicação partindo da disposição rectangular de objectos. Assim, propõem-se tarefas nesse sentido e que sugerem e promovem a utilização de algumas propriedades desta operação.

Neste ano de escolaridade, é ainda fundamental que se desenvolvam estratégias de cálculo mental e escrito, recorrendo às propriedades da multiplicação, tanto em situações associadas a contextos da vida real como em situações cujo contexto é matemático. Note-se que os contextos associados a esta operação devem ser múltiplos e variados de modo a proporcionar aos alunos a exploração de situações relacionadas com os diferentes sentidos da multiplicação. Considerando que nos anos anteriores os alunos resolveram problemas associados ao sentido aditivo e, eventualmente, ao sentido combinatório, propõe-se, neste ano de escolaridade, a resolução de problemas que partam de situações associadas a esses sentidos e também ao raciocínio proporcional, aspecto que é referido no Programa de Matemática, no tópico Regularidades.

Tendo em conta que o novo Programa de Matemática preconiza um modo de abordar os algoritmos claramente diferente do que era tradicionalmente feito, as sequências de tarefas propostas, exemplificam dois aspectos fundamentais. Um primeiro diz respeito ao peso a dar ao algoritmo, assumindo-se que é fundamental desenvolver um trabalho significativo em torno da resolução de problemas, explorando relações numéricas, propriedades da multiplicação e consolidando automatismos de cálculo. Esta perspectiva é claramente traduzida na sequência 2 e continuada na sequência 3. Um segundo aspecto diz respeito à introdução do algoritmo numa perspectiva de análise de diferentes estratégias e da escolha da(s) mais eficaz(es), tal como se exemplifica na tarefa *Calcular de maneiras diferentes*.

No que diz respeito à operação divisão o objectivo principal é a resolução de problemas envolvendo os diferentes sentidos associados a esta operação tirando partido da relação inversa entre esta e a operação multiplicação.

É de notar que, na sequência 3, não se restringe o universo numérico ao dos números naturais e utilizam-se igualmente números representados na forma decimal.

Números racionais não negativos: Fracções e Decimais

O actual Programa de Matemática rompe com o que acontecia anteriormente, incluindo no 1.º Ciclo, um trabalho com números racionais representados na forma de fracção. A estes, no anterior Programa, havia apenas uma breve referência associada ao significado de operador.

No 3.º ano, retoma-se a abordagem intuitiva aos números racionais, realizada nos dois primeiros anos a partir de situações de partilha equitativa e de divisão da unidade em partes iguais, alargando-a à exploração de situações que permitem trabalhar outros significados das fracções. A par deste trabalho são introduzidos, a partir de contextos significativos, os números racionais representados na forma de fracção, devendo ser explicitamente exploradas situações que envolvam os significados quociente, parte-todo e operador.

A sequência 4 ilustra uma possível abordagem aos números racionais não negativos, evidenciando o modo como diversos contextos – repartir salsichas, conta-quilómetros de um automóvel, dinheiro, medição de comprimentos ou dobrar uma folha papel – permitem explorar estes números e iniciar um trabalho que contribui para compreender relações entre a representação na forma de fracção e na forma decimal de um mesmo número racional, aspecto que irá ser aprofundado no 4.º ano.

SEQUÊNCIA 1
-
NÚMEROS NATURAIS

Tópicos	Objectivos específicos	Notas	Tarefas	Organização temporal
Relações numéricas	– Comparar números e ordená-los em sequências crescentes e decrescentes. – Ler e representar números, pelo menos até ao milhão. – Realizar estimativas e avaliar a razoabilidade de um resultado em situações de cálculo[1]. – Compreender o sistema de numeração decimal.	– Propor a leitura e a representação de números, aumentando gradualmente o seu valor, a par da resolução de problemas. – Propor a utilização de tabelas com números de 1000 em 1000, de 10000 em 10000 e outras deste tipo, como apoio na contagem de números até ao milhão.	**Investigações sobre números "grandes"** **Contar palavras**	Esta tarefa sugere duas partes: a investigação e a sua apresentação à turma (90 minutos mais 90 minutos). Esta tarefa deve ser explorada em 90 minutos mais 60 minutos (incluindo a discussão na turma).
Múltiplos e divisores	– Identificar e dar exemplos de múltiplos de um número natural	– Propor aos alunos que trabalhem com múltiplos de 2,3,4,5... 10 e respectivos divisores.	**Regularidades, números pares e múltiplos de 5 e 10** **Mais regularidades, números pares e múltiplos de 4**	A tarefa deve ser explorada durante cerca de 90 minutos mais 60 minutos (incluindo a discussão na turma). A tarefa deve ser explorada durante cerca de 90 minutos mais 60 minutos (incluindo a discussão na turma).
	– Identificar e dar exemplos de múltiplos e divisores de um número natural. – Tirar partido da relação entre multiplicação e divisão[2]. – Compreender que os divisores de um número são divisores dos múltiplos (e que os múltiplos de um número são múltiplos dos divisores).	– Propor aos alunos que trabalhem com múltiplos de 2,3,4,5... 10 e respectivos divisores.	**Decompor números**	O jogo deve ter uma duração de cerca de 90 minutos. Este jogo pode ser jogado várias vezes, ampliando o conjunto numérico.

[1] Este objectivo está associado ao tópico Operações com números naturais.
[2] Este objectivo está associado ao tópico Operações com números naturais.

Investigações sobre números “grandes”

4539495873542340921

Escolhe, com o teu par, um dos exemplos de investigações com números “grandes” que mais te interessa e investiga.

Investigando as batidas do coração

Será que o teu coração já bateu 1000 vezes? Quanto tempo será necessário para o nosso coração bater 10 000 vezes? Investiga.

Investigando o número de dias de vida

Tens ideia de quantos dias já viveste? Menos que 1000 dias? Quase 10 000 dias? Investiga.

O primo do João, que tem 10 anos, diz que já viveu 1 milhão de dias.

O João responde: Isso nem o meu avô viveu e tem 60 anos!

Será que é verdade? Investiga.

Investigando o número de horas de vida

A Ana, que tem 8 anos, diz que já viveu 1 milhão de horas.

O André responde: Era preciso termos para aí uns 100 anos para termos vivido 1 milhão de horas!

Será que é verdade? Investiga quem tem razão, Ana ou André.

Tarefa 1 – Investigações sobre números "grandes"

Materiais

- Fotocópia da folha da tarefa
- Calculadora elementar
- Cronómetro ou relógio para medir as batidas do coração
- Calendários

Ideias disponíveis e em desenvolvimento

- Comparar números e ordená-los em sequências crescentes e decrescentes

Ideias e procedimentos a desenvolver

- Comparar números ("grandes") e ordená-los em sequências crescentes e decrescentes
- Ler e representar números, pelo menos até ao milhão
- Realizar estimativas e avaliar a razoabilidade de um resultado em situações de cálculo[3]
- Compreender o sistema de numeração decimal

Sugestões para exploração

Esta tarefa tem como propósito sensibilizar os alunos para a existência de números "grandes", partindo de situações desafiantes e intrigantes para o seu nível etário.

Antes de desafiar os alunos para realizar a investigação, o(a) professor(a) pode ter uma conversa inicial com a turma para tentar perceber que ideia têm de número "grande", qual a sua ordem de grandeza e que associação fazem com situações que são representadas por números "grandes". Para ter uma ideia das concepções dos alunos associadas a números "grandes" o(a) professor(a) pode organizar uma discussão à volta de propostas do tipo:

[3] Este objectivo está associado ao tópico Operações com números naturais.

- *Escreve um número que consideres muito grande. Explica porquê.*
- *Indica um número de qualquer coisa que conheças, na sala de aula ou não, que consideres um número muito grande. Explica porquê.*

Esta discussão pode também ser uma oportunidade (no caso de fazer sentido) para serem lidos os números sugeridos pelos alunos recordando, explicando ou consolidando a leitura por extenso de números maiores que 1000.

Associada à discussão de números "grandes" provavelmente surgirá a palavra milhão e o(a) professor(a) pode também tentar perceber o que ela significa para eles e como o representam numericamente.

A partir daí é importante propor que, em pares, escolham uma questão desafiante sobre uma temática que lhes suscite curiosidade e tentem investigar possíveis respostas. De modo a dar-lhes algumas ideias sobre temáticas a investigar, suficientemente intrigantes, surgem os exemplos apresentados nesta tarefa. No entanto, podem ser os próprios alunos a escolher outros temas que considerem mais interessantes, ficando a cargo do(a) professor(a) a gestão equilibrada de interesses, de modo que todos os pares trabalhem com números suficientemente grandes e em tarefas exequíveis.

É ainda de realçar que algumas das investigações implicam uma pesquisa de aspectos não relacionados exclusivamente com a Matemática, como no caso das batidas do coração. É importante medir directamente as pulsações por minuto (usando um cronómetro/relógio) ou procurar saber o número aproximado de batidas por minuto de um coração saudável. Pode-se também questionar se o coração de uma criança de 8 anos bate da mesma forma do de um adulto de 40 anos. E como baterá o coração de um bebé? Deste modo, para além dos aspectos matemáticos envolvidos, estão presentes, nesta tarefa, conexões entre a Matemática e outras áreas do saber, neste caso o Estudo do Meio.

Para além da sensibilidade para a ordem de grandeza dos números é fundamental que os alunos os consigam comparar e ordenar, à semelhança do que foi feito anteriormente, nos primeiros anos, com números mais pequenos. Assim, os alunos vão aumentando a sua compreensão sobre as relações entre os números e as características do sistema de numeração decimal.

Um aspecto a ter em conta durante a resolução da tarefa relaciona-se com os cálculos que são necessários efectuar. O objectivo não é o cálculo em si mas os números obtidos, a sua ordem de grandeza e a comparação com outros. Assim, sugere-se a utilização de uma calculadora elementar de modo a trabalhar de facto com números realistas e a tornar os cálculos mais rápidos e eficazes, evitando o desinteresse dos alunos. A utilização adequada deste meio tecnológico pressupõe um conhecimento sobre os procedimentos associados a este instrumento de cálculo, para além de exigir a capacidade para realizar estimativas e avaliar a razoabilidade dos resultados obtidos nas várias situações de cálculo.

É fácil perder a noção da razoabilidade de um resultado quando se trabalha com números "grandes". Por isso devem ser interiorizados alguns valores de referência que balizam os resultados que se procuram. Por exemplo, 4200 pode ser assumido como o número médio de batidas do coração numa hora, sendo uma referência para o cálculo das batidas do coração . Um aluno que ao usar a calculadora ou outro meio de cálculo obtenha 5040 batidas durante meio-dia compreende que houve algum engano. Se forem 4200 batidas numa hora é impossível obter 5040 em 12 horas.

Considerando a existência de interesses diferentes na mesma turma, é fundamental reservar um tempo, posterior ao desenvolvimento da investigação, em que cada par apresenta ao resto da turma as descobertas efectuadas e os números "grandes" que obteve. Torna-se essencial apresentar um registo escrito desses números, compará-los entre si e efectuar a sua leitura por extenso e oralmente. Por exemplo, no caso das batidas do coração podem surgir números como 42 000 e 50 400, a partir dos quais o(a) professor(a) pode perguntar:

- *Qual o número que está antes de 42 000? E de 50 400?*
- *50 199 é maior que 50 400?*
- *Indica um número entre 42 000 e 50 400.*
- *Quanto devem adicionar a 42 000 para obter 50 000? E 50 400? O que traduz o último número obtido?*

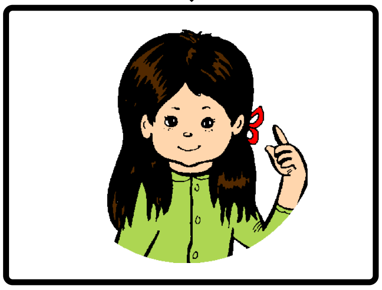
No caso de os alunos ainda não conhecerem o milhão, algumas das investigações efectuadas são um contexto favorável para o identificar, representar e dar-lhe significado, associando-o às grandezas trabalhadas.

Possíveis caminhos a seguir pelos alunos

As possíveis hipóteses de resposta às primeiras perguntas podem ser bastante variadas. A representação de um número "grande" pode ser apenas uma sequência de muitos algarismos, sem estar associado a algum significado. No entanto, a resposta à segunda questão pode ser feita de muitas maneiras, mas associada a uma grande quantidade, por exemplo, ao número de cabelos de uma cabeça, ao que se pode ganhar no Euromilhões, ao número de grãos de areia da praia, ao número de pacotes de leite que estão guardados na despensa da escola, etc. Muitas vezes a ideia de milhão está associada tanto a uma grande quantidade de algo como a qualquer coisa que é impossível contar ou medir.

Se for pedido aos alunos para representarem algo cuja quantidade seja aproximadamente um milhão, estes poderão usar imagens como as seguintes:

Um milhão de cabelos



Um milhão de peixes no mar

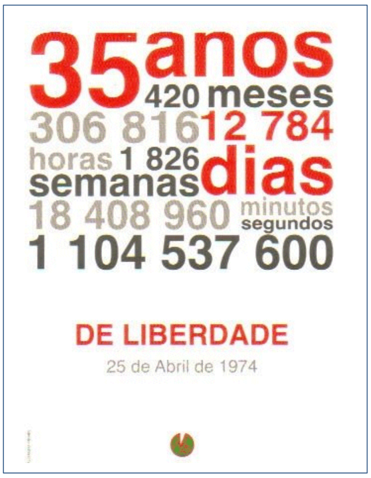
Muito poucos alunos deste nível etário tentam fazer uma representação mais abstracta de um número grande ou mesmo de um milhão apesar de alguns fazerem filas com muitos algarismos, não usando exclusivamente o zero. Tanto podem surgir números como 10 000 para representar simbolicamente números "muito grandes" como 3542885569876097543. Conhecem e usam a expressão "um milhão" e numericamente associam-na a diferentes representações.

As propostas incluídas nesta tarefa são bastante abertas, de modo a permitir que os próprios alunos seleccionem um caminho a seguir e os desafios colocados podem ser apenas o ponto de partida para investigações mais complexas. Por exemplo, no caso do número de horas que já viveu uma criança com 8 anos (ou com 10) pode haver alunos que queiram continuar e investigar quantos minutos ou segundos já viveram e aí surgem rapidamente números bastante maiores que os anteriores, da ordem dos milhões.

Extensão

Uma proposta que permite igualmente trabalhar os números "grandes" consiste em propor aos alunos a realização de um projecto que também desenvolve competências da área das Expressões. O desafio pode ser lançado a partir do seguinte enunciado:

> *No âmbito das comemorações do aniversário do 25 de Abril realiza-se anualmente um concurso de cartazes[4]. Em 2009, assinalando o 35.º aniversário do 25 de Abril, o aluno Alexandre Croner Afonso venceu este concurso com o seguinte cartaz:*



- *Observa atentamente o cartaz e explica como é que foram obtidos os números 12 784 e 306 816.*
- *Usando o mesmo tipo de ideia de Alexandre Croner Afonso elabora um cartaz para comemorar o teu próximo aniversário.*

[4] Informação em http://www.dgidc.min-edu.pt/PressReleases/Paginas/Concursodedesign25ABRIL.aspx (retirado em 16/04/2010)

Contar palavras

A Marta gosta muito de escrever histórias no computador. No espaço diário reservado à leitura, as várias histórias inventadas pela Marta e pelos seus colegas são lidas e discutidas por todos.

No outro dia, a Marta chegou à escola e disse que já tinha escrito uma história com 1200 palavras. Explicou aos colegas que o pai a ensinou a ver no computador quantas palavras tem um documento escrito num determinado tipo de letra e formato.

Fazes ideia de quantas páginas a Marta já escreveu? Discute com os teus colegas uma maneira de calcular, aproximadamente, quantas páginas a Marta já escreveu.

Tarefa 2 – Contar palavras

Materiais

- Fotocópia da folha da tarefa
- Calculadora elementar
- Computador para aceder a textos escritos, para contar palavras

Ideias disponíveis e em desenvolvimento

- Ler e representar números, pelo menos até ao milhão
- Compreender o sistema de numeração decimal

Ideias e procedimentos a desenvolver

- Comparar números ("grandes") e ordená-los em sequências crescentes e decrescentes
- Representar números "grandes" na linha numérica vazia (recta não graduada)
- Utilizar tabelas para apoio à representação e comparação de números "grandes"

Sugestões para exploração

Esta tarefa tem como propósito a exploração de uma situação cada vez mais comum e que é efectuada de modo automático pelo computador – a contagem das palavras de um texto. Através desta situação bastante acessível à compreensão dos alunos, estes têm oportunidade de manipular números "grandes", de os comparar entre si e de os ordenar. De modo a tornar a situação introdutória mais realista e próxima dos alunos, o(a) professor(a) pode propor que estes contem palavras no computador, eventualmente a partir de textos que tenham construído no âmbito de outra área curricular. Este trabalho deve ser realizado a pares, de modo a proporcionar discussões mais ricas associadas à resolução da tarefa.

No caso de os alunos não identificarem um valor plausível para o número de palavras correspondente a uma página, ou o(a) professor(a) considerar mais adequado usarem todos o mesmo número, pode propor o uso de 400 palavras por página, como valor aproximado. É importante discutir o significado de valor aproximado, de modo a clarificar possíveis equívocos. Neste caso, o número 400 foi escolhido por ser um número bastante próximo da realidade e ser múltiplo de 10 e de 100, o que facilita bastante os cálculos e pode incentivar os alunos a efectuar alguns deles utilizando o cálculo mental e as propriedades dos números envolvidos. A calculadora é também um recurso a que se pode recorrer nesta tarefa, principalmente se os alunos trabalharem com um número menos "redondo" que o 400. Sobretudo se os alunos optarem pelo uso da operação divisão é importante que o(a) professor(a) apoie a execução dos cálculos através da calculadora ou computador e ajude na interpretação e clarificação do resultado obtido, certamente um número na sua representação decimal. No caso sugerido, em que a Marta escreveu um texto com 1200 palavras, se se considerar que cada página tem 378 palavras o resultado obtido pode ser 3,18. Como interpretar este valor em termos de número de páginas escritas?

De modo a fazer surgir números "grandes" e as relações entre eles, devem ser escolhidas as perguntas que podem ser colocadas após a exploração inicial. Por exemplo:

- *O livro que os alunos da turma andam a ler tem 50 páginas. Será que tem mais de 15 000 palavras?*
- *Se um livro tiver 50 páginas, quantas palavras foram escritas, aproximadamente?*
- *Se um livro tiver 25 páginas, quantas palavras foram escritas, aproximadamente? E se um livro tiver 100 páginas?*
- *Se um escritor escrever um livro com 24 000 palavras com quantas páginas fica o livro, aproximadamente?*
- *E se Marta escrever um texto com 4 000 palavras, quantas páginas tem aproximadamente?*

Nestes exemplos, os números utilizados nas várias questões foram pensados de modo a ser possível estabelecer algumas relações entre eles, nomeadamente, relações de dobro e metade, agora com números muito maiores do que anteriormente. Assim, espera-se que os alunos identifiquem que 25 é metade de 50, logo o número de palavras escritas em 25 páginas terá de ser metade do número de palavras escritas em 50 páginas. Por outro lado, sendo 100 o dobro de 50 e o quádruplo de 25 existe uma relação de dobro e uma relação de quádruplo entre os correspondentes números de palavras.

A escolha do número de palavras por página pode obedecer a diferentes critérios. Alguns professores podem preferir uma abordagem mais realista e escolher um valor retirado de uma contagem concreta realizada pelos alunos. Neste caso os cálculos anteriores não são tão propícios ao estabelecimento de relações entre os números usando o cálculo mental. Outros podem optar por escolher o valor aproximado de 400 palavras por página, pois têm também como objectivo, desenvolver o cálculo mental.

Esta escolha entre o valor real, obtido a partir de uma recolha concreta de dados e o valor aproximado, tem de ser liderada pelo(a) professor(a). As crianças desta idade tendem a assumir os valores exactos que obtêm, tendo relutância em trabalhar com valores aproximados. No entanto, na vida de todos os dias, cada vez mais se usa o cálculo mental com valores aproximados (para calcular mentalmente escolhem-se números "redondos" e recorre-se às relações entre eles). Para o cálculo exacto com números "grandes" usa-se uma máquina de calcular.

A questão "Será que é possível ter um livro com um milhão de palavras? Aproximadamente, terá mais de 100, 1000 páginas? Investiga (no caso de facilitar constrói uma tabela)" pode servir para a introdução de uma tabela que relaciona o número de páginas de um texto com o número de palavras escritas e que pode ter alguns números já inseridos, explicitando as relações entre eles e sugerindo aos alunos que a completem. De modo a facilitar os cálculos neste caso é de considerar um número aproximado de 400 palavras por página.

N.º de páginas	1	10	20	50				
N.º de palavras					24 000	40 000	400 000	

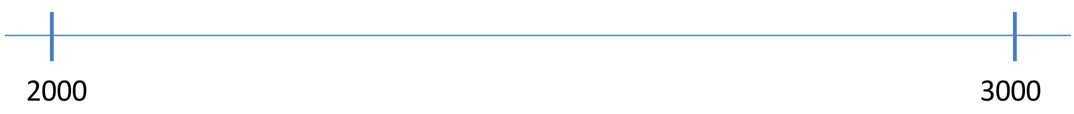
Os alunos podem ir preenchendo a tabela, acrescentando mais ou menos colunas para tentar chegar ao milhão. O preenchimento desta tabela ajuda, de forma eficaz, ao estabelecimento de relações entre as duas grandezas representadas: o número de páginas e o número de palavras de um texto. Constitui, também, um apoio à representação e à comparação entre os números envolvidos, apesar da sua ordem de grandeza. A última coluna está vazia, de modo a desafiar os alunos a completarem-na com dois números que verifiquem a relação estabelecida. O desafio de chegar ao milhão pode ser concretizado por alguns deles. É interessante, posteriormente, comparar os vários números obtidos pelos pares de alunos e organizá-los segundo uma ordem crescente ou decrescente.

Um outro desafio a colocar aos alunos pode ser:

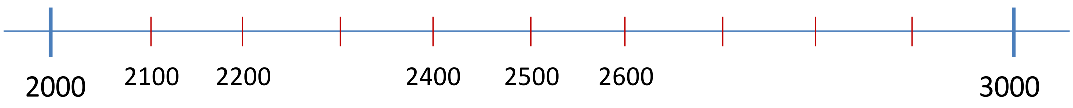
- *Ordenar, na linha numérica vazia (recta não graduada), os números correspondentes ao número de palavras escritas nos vários textos dos alunos.*

Numa turma em que os textos escritos pelos alunos tinham 2000, 2405, 2100, 2224, 3000 e 2550 palavras, o(a) professor(a) pode orientar o trabalho por fases:

- *marcação dos "limites" numéricos da linha*



- *marcação dos valores de referência que ficam no intervalo 2000 e 3000 e que será importante assinalar*



É fundamental que, neste caso, os alunos compreendam que os limites numéricos da linha são o 2 000 e o 3 000, posicionando todos os outros entre estes dois. Estamos, deste modo, a evidenciar a grandeza relativa dos números representados.

Tarefas deste tipo, de comparação e ordenação de números naturais "grandes", devem ser propostas regularmente, aumentando progressivamente a ordem de grandeza dos números utilizados, visando o desenvolvimento da compreensão dos alunos sobre os números e o funcionamento do sistema de numeração decimal.

Possíveis caminhos a seguir pelos alunos

Na resolução desta tarefa os alunos podem seguir vários caminhos, consoante a operação utilizada e o número aproximado de palavras por página que usarem. Assim, no caso de usarem o 400 podem recorrer aos produtos sucessivos até se aproximarem do 1200, fazendo 3 × 400. No caso de utilizarem a divisão podem dividir 1200 por 400 e obter mentalmente 3, dadas as características dos números envolvidos.

No preenchimento da tabela os alunos podem começar por preencher alguns espaços com os números usados nas questões anteriores e relacioná-los entre si. Também podem começar por preencher a primeira coluna e a partir daí calcular todos os outros números recorrendo à multiplicação. Os números escolhidos têm a vantagem de serem múltiplos de 10, 100, 1000, podendo os alunos recorrer às regularidades identificadas da multiplicação de um número por um múltiplo de 10, 100, 1000. Considerando a relação de proporcionalidade directa estabelecida entre as duas grandezas representadas e as características dos números envolvidos, os alunos podem estabelecer relações entre os números de uma mesma linha, trabalhando apenas com uma grandeza, ou ir relacionando as grandezas entre si.

Extensão

Uma possível extensão da tarefa pode surgir do seguinte modo:

Após a tarefa Contar palavras os colegas da Marta ficaram cheios de curiosidade para ver como se contavam as palavras de um texto no computador e, com o apoio da professora, viram no computador como funciona essa opção. E descobriram outro desafio interessante! Para além de contar palavras o computador também conta caracteres! Depois de serem esclarecidos sobre o que são caracteres perceberam que, se um texto com algumas páginas tem muitas palavras, tem muitos mais caracteres! Interrogaram-se:

- *Um livro com 100 páginas quantos caracteres terá?*
- *Será que tem mais de 1 000 000 (um milhão) de caracteres? Quantos mais?*

REGULARIDADES, NÚMEROS PARES E MÚLTIPLOS DE 5 E 10

1. Observa com atenção a tabela da página seguinte.

   - *O que podes afirmar sobre os números da tabela?*
   - *Discute as tuas descobertas com os teus colegas de grupo. Descreve numa folha de papel as descobertas que fizeram e as regularidades que descobriram.*

2. Usa lápis de cores diferentes e

   - *Pinta da mesma cor todos os números que são múltiplos de 5, ou seja, começa no 5 e vai pintando todos os números de 5 em 5.*
   - *Pinta de cor diferente da primeira, todos os números que são múltiplos de 10, ou seja, começa no 10 e vai pintando todos os números de 10 em 10.*
   - *Há números que ficaram pintados com duas cores. Quais são? Consegues explicar porquê?*
   - *O que descobriste sobre os múltiplos de 10 e de 5?*

3. Usa uma cor diferente das anteriores. Pinta todos os números pares (múltiplos de 2) da tabela.

   - *O que descobriste?*

4. Há números que ficaram pintados com três cores.

   - *Quais são? Consegues explicar porquê?*

REGULARIDADES, NÚMEROS PARES E MÚLTIPLOS DE 5 E 10

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25
26	27	28	29	30
31	32	33	34	35
36	37	38	39	40
41	42	43	44	45
46	47	48	49	50

Tarefa 3 – Regularidades, números pares e múltiplos de 5 e 10

Materiais

- Fotocópia das folhas da tarefa
- Lápis de cor

Ideias disponíveis e em desenvolvimento

- Comparar números e ordená-los em sequências crescentes e decrescentes
- Compreender o sistema de numeração decimal
- Compreender as tabuadas da multiplicação
- Identificar regularidades em tabelas numéricas

Ideias e procedimentos a desenvolver

- Identificar e dar exemplos de múltiplos de um número
- Identificar as propriedades dos múltiplos de 2, 5 e 10

Sugestões para exploração

Na primeira parte da tarefa é importante que os alunos observem com atenção os números dispostos na tabela e identifiquem algumas regularidades. Esta tarefa pode ser desenvolvida em grupo, reservando o(a) professor(a) um tempo para a discussão com toda a turma. Para além da identificação das regularidades é fundamental que as tentem descrever oralmente e por escrito, no sentido de desenvolver a sua capacidade de comunicação matemática. Após o trabalho em grupo, cada um deles apresenta as regularidades encontradas, justificando perante os colegas as suas conjecturas e comparando-as com outras. A apresentação e justificação das regularidades descobertas devem ser feitas no final de cada uma das outras partes da tarefa, alternando momentos de trabalho em grupo com momentos de discussão e reflexão colectivas, sob a orientação do(a) professor(a).

É natural que algumas regularidades não surjam com facilidade. Neste caso, o(a) professor(a) pode dirigir a atenção dos alunos, por exemplo, para a primeira coluna, facilitando a identificação de regularidades como:

Na primeira coluna os números acabam sempre em 1 e 6 → 1,6,1,6, …;

1
6
11
16
21
26
31
36
41
46

Adicionando sempre 5 passa-se de um número para o seguinte.

1	+ 5
6	+ 5
11	+ 5
16	+ 5
21	+ 5
26	+ 5
31	+ 5
36	+ 5
41	+ 5
46	

A partir da observação das regularidades relativas à primeira coluna torna-se mais fácil para os alunos identificarem regularidades associadas às outras colunas e também às linhas.

Nesta tarefa os alunos identificam regularidades e propriedades dos múltiplos de 2, 5 e 10 a partir da observação dos números de 1 a 50, organizados numa tabela. Um desafio adicional que pode ser lançado é usar os conhecimentos sobre as propriedades associadas aos múltiplos de 2, 5 e 10 para números superiores a 50, sem que haja um registo com esses números. Podem, por exemplo, colocar-se as seguintes questões:

- *Indicar um número maior que 50 e que seja múltiplo de 2 e 5.*
- *Indicar um número maior que 50 e que seja múltiplo de 2 e não de 5.*
- *Indicar um número maior que 50 e que seja múltiplo de 5 e não de 10.*
- *A soma de dois múltiplos de 10 é sempre um múltiplo de 10? Justificar.*

Possíveis caminhos a seguir pelos alunos

Na primeira parte da tarefa (questão 1), após a observação atenta dos números organizados em tabela, os alunos podem fazer observações semelhantes às seguintes:

- *São os números todos até 50;*
- *Há números pares e números ímpares;*
- *É um ímpar, um par, um ímpar, um par, …;*
- *A tabela tem 10 linhas e 5 colunas, são 50 números;*
- *A última coluna é a tabuada do 5;*
- *Na primeira coluna os números acabam sempre 1,6,1,6, …; na segunda em 2, 7, 2, 7, …; na terceira em 3, 8, 3, 8, …, etc.*

- *A diferença entre os números das sequências anteriores é sempre de 5, 6-1 é 5; 7-2 é 5; 8-3 é 5;*

- *A diferença entre os números de uma linha e os correspondentes da linha anterior é sempre 5 (por exemplo, 11-6; 28-23; 35-30, …).*

Seguindo a sugestão do(a) professor(a) os alunos podem traçar diagonais com o lápis.

Ao observar os números na diagonal, identificam regularidades tais como:

- *Há diagonais só com números pares e outras só com números ímpares.*

- *A diferença entre os números consecutivos em cada diagonal é sempre 4 (se forem marcadas as diagonais na outra direcção esta diferença é sempre 6).*

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25
26	27	28	29	30
31	32	33	34	35
36	37	38	39	40
41	42	43	44	45
46	47	48	49	50

Depois de os alunos terem pintado a tabela de acordo com as primeiras instruções (questões 2 e 3) podem concluir que todos os múltiplos de 10 são múltiplos de 5 mas há múltiplos de 5 que não são múltiplos de 10. Observam também que os múltiplos de 10 têm o algarismo das unidades igual a 0 e os múltiplos de 5 têm o algarismo das unidades igual a 5 ou a 0.

Na última parte da tarefa (questão 4), ao pintarem os números pares depois de terem pintado os múltiplos de 5 e 10, os alunos ficam com uma tabela semelhante à apresentada, que lhes permite concluir que:

- *todos os múltiplos de 10 são múltiplos de 2 mas há múltiplos de 2 que não são múltiplos de 10;*

- *há múltiplos de 5 que são múltiplos de 2 e há múltiplos de 2 que são múltiplos de 5;*
- *todos os múltiplos de 10 são múltiplos de 2 e de 5;*
- *o algarismo das unidades dos múltiplos de 2 é sempre 0, 2, 4, 6 ou 8.*

1	2	3	4	**5**
6	7	8	9	**10**
11	12	13	14	**15**
16	17	18	19	**20**
21	22	23	24	**25**
26	27	28	29	**30**
31	32	33	34	**35**
36	37	38	39	**40**
41	42	43	44	**45**
46	47	48	49	**50**

Mais regularidades, números pares e múltiplos de 4

1. Observa com atenção a tabela da página seguinte.

   - *O que podes afirmar sobre os números da tabela?*

   - *Discute as tuas descobertas com os teus colegas de grupo. Descreve numa folha de papel as descobertas que fizeram e as regularidades que descobriram.*

2. Usa lápis de cores diferentes e

   - Pinta da mesma cor todos os números pares.

   - Pinta de cor diferente da primeira, todos os números que são múltiplos de 4, ou seja, começa no 4 e vai pintando todos os números de 4 em 4.

   - *Há números que ficaram pintados com duas cores. Quais são? Consegues explicar porquê?*

   - *O que descobriste sobre os múltiplos de 2 e de 4?*

Mais regularidades, números pares e múltiplos de 4

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16
17	18	19	20
21	22	23	24
25	26	27	28
29	30	31	32
33	34	35	36
37	38	39	40
41	42	43	44
45	46	47	48
49	50	51	52
53	54	55	56
57	58	59	60

Tarefa 4 – Mais regularidades, números pares e múltiplos de 4

Materiais

- Fotocópia das folhas da tarefa
- Lápis de cor

Ideias disponíveis e em desenvolvimento

- Comparar números e ordená-los em sequências crescentes e decrescentes
- Compreender o sistema de numeração decimal
- Compreender as tabuadas da multiplicação
- Identificar e dar exemplos de múltiplos de um número natural
- Identificar regularidades em tabelas numéricas

Ideias e procedimentos a desenvolver

- Identificar e dar exemplos de múltiplos de um número natural

Sugestões para exploração

Na primeira parte da tarefa é importante, tal como na tarefa anterior, que os alunos observem com atenção os números dispostos na tabela e identifiquem algumas regularidades. Esta tarefa deve ser desenvolvida em grupo, reservando o(a) professor(a) um tempo para a sua discussão com toda a turma. É fundamental que os alunos tentem descrever, oralmente e por escrito, as regularidades descobertas, no sentido de desenvolver a sua capacidade de comunicação matemática. Após o trabalho em grupo, cada um deles apresenta-o ao resto da turma, justificando perante os colegas as suas conjecturas e comparando-as com outras. A apresentação e justificação das regularidades descobertas devem ser feitas no final de cada uma das outras partes da tarefa, alternando momentos de trabalho em grupo com momentos de discussão e reflexão colectivas, sob a orientação do(a) professor(a). Espera-se que os alunos identifiquem regularidades com mais facilidade que na tarefa anterior, uma vez que desenvolveram previamente a tarefa com múltiplos de 2, 5 e 10, conhecendo mais profundamente características e propriedades dos múltiplos de 2.

Possíveis caminhos a seguir pelos alunos

Na primeira parte da tarefa, após a observação atenta dos números organizados em tabela, os alunos podem apresentar regularidades tais como:

- *Os números são alternadamente números pares e números ímpares;*
- *A tabela tem 15 linhas e 4 colunas, com um total de 60 números;*
- *A última coluna é a tabuada do 4 até ao 60;*
- *Na primeira coluna o algarismo das unidades dos números é alternadamente 1,5,9,3,7; 1,5,9,3,7; …, na segunda é 2, 6, 0, 4, 8; 2, 6, 0, 4, 8; …; na terceira é 3, 7, 1, 5, 9; 3, 7, 1, 5, 9; … etc.*
- *Na primeira coluna a sequência dos algarismos das unidades dos números é igual à sequência dos algarismos das unidades dos números na terceira coluna;*
- *Na segunda coluna a sequência dos algarismos das unidades dos números é igual à sequência dos algarismos das unidades dos números na quarta coluna;*
- *A diferença entre os números de uma linha e os correspondentes da linha anterior é sempre 4 (por exemplo, 5-1; 6-2; 7-3, …);*
- *Há colunas só com números pares e colunas só com números ímpares, etc.*

Depois de os alunos terem pintado a tabela de acordo com as instruções podem concluir que todos os múltiplos de 4 são múltiplos de 2 mas há múltiplos de 2 que não são múltiplos de 4, por exemplo o 10. Observam também que os múltiplos de 4 têm o algarismo das unidades igual a um número par. A tabela depois de colorida fica com um aspecto semelhante ao apresentado a seguir.

Uma tabela igual pode ser usada, num outro dia, para explorar os múltiplos de 3 e os pares, por exemplo, permitindo aos alunos tirar conclusões sobre os múltiplos envolvidos e as relações entre eles.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16
17	18	19	20
21	22	23	24
25	26	27	28
29	30	31	32
33	34	35	36
37	38	39	40
41	42	43	44
45	46	47	48
49	50	51	52
53	54	55	56
57	58	59	60

Números pares e múltiplos de 4

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16
17	18	19	20
21	22	23	24
25	26	27	28
29	30	31	32
33	34	35	36
37	38	39	40
41	42	43	44
45	46	47	48
49	50	51	52
53	54	55	56
57	58	59	60

Números pares e múltiplos de 3

Decompor números

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40

Grupo A		
Número	Produtos	Pontuação

Grupo B		
Número	Produtos	Pontuação

Tarefa 5 – Decompor números[5]

Material

- Tabela com números até 40

Ideias disponíveis e em desenvolvimento

- Compreender o sistema de numeração decimal
- Compreender as tabuadas da multiplicação
- Identificar e dar exemplos de múltiplos de um número natural
- Identificar regularidades em tabelas numéricas

Ideias e procedimentos a desenvolver

- Identificar e dar exemplos de divisores de um número natural
- Tirar partido da relação entre multiplicação e divisão[6]
- Compreender que os divisores de um número são divisores dos múltiplos (e que os múltiplos de um número são múltiplos dos divisores)

Sugestões para exploração

Esta tarefa consiste num jogo que deve ser jogado entre dois grupos. No início pode dividir-se a turma em dois grupos: grupo A e grupo B. Depois de todos os alunos perceberem como funciona o jogo, podem organizar-se grupos mais pequenos, de 4 ou 6 alunos.

Cada grupo deve ter uma tabela ou então o(a) professor(a) pode optar por ampliar uma e colocá-la num local bem visível para todos.

O grupo A escolhe um número da tabela e di-lo em voz alta. O grupo B tem de seleccionar na tabela números cujo produto seja o número escolhido pelo grupo A.

[5] Esta tarefa foi inspirada no jogo *Points for dividing* de Treffers, A. (2001). Numbers and number relationships. In Van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Children learn mathematics* (pp. 101-120). Utrecht, The Netherlands: Freudenthal Institute, University of Utrecht.
[6] Este objectivo está incluído no tópico Operações com números naturais.

Por exemplo, o grupo A escolhe o número 10. Então o grupo B pode seleccionar na tabela o 2, o 5, o 1 e o próprio 10. Em seguida deve usar estes números para formar produtos iguais a 10: $2\times5=10$, $1\times10=10$ e $1\times2\times5=10$. Por cada produto correcto escolhido o grupo B ganha 1 ponto, ficando, neste exemplo, com um total de 3 pontos.

Os grupos trocam de papéis alternadamente. Ora escolhe o grupo A um número da tabela e o grupo B indica os produtos iguais ao número que lhe foi indicado, ora é a vez de o grupo B escolher um número da tabela. É importante estipular um tempo limite para a resposta e um número máximo de jogadas para concluir o jogo, por exemplo 10 para cada grupo. Ganha quem tiver mais pontos no final do jogo.

Este jogo deve ser jogado várias vezes, de modo que os alunos possam compreender qual é a estratégia ganhadora. É fundamental, ao fim de alguns jogos, discutir com os alunos as razões da escolha dos números, de modo a seguir uma estratégia potencialmente vencedora e a evitar que o grupo adversário ganhe pontos.

Sem que se usem os termos relativos a vários conceitos e propriedades, nesta tarefa estão implícitos os conceitos de número primo, de elemento neutro da multiplicação e de decomposição em factores de um número.

Possíveis caminhos a seguir pelos alunos

No início é provável que os alunos joguem um pouco ao acaso, sem perceberem qual a estratégia a utilizar de modo a fazer mais pontos e a impedir que a equipa adversária os faça. Alguns alunos poderão associar o facto de um número ter muitos divisores à grandeza do número, tendo tendência para escolher números pequenos. No entanto, rapidamente percebem que essa conjectura não é verdadeira, pois, por exemplo o 8 pode decompor-se em 1×8, 2×4, $2 \times 2 \times 2$, $1 \times 2 \times 4$ e $1 \times 2 \times 2 \times 2$ enquanto o 37 só se pode decompor em 1×37, logo o 8 não é um número bom para ser escolhido. A partir de algum tempo a escolha é feita com base no conhecimento sobre as decomposições dos números em produtos.

Depois de algumas jogadas os alunos também constatam que o número 1 não altera o valor do produto e, por isso, quando se indica uma decomposição há sempre outra igual a ela, acrescentando o factor 1. Por exemplo, para o número 22, depois de indicada a decomposição 2×11 é imediato encontrar $1 \times 2 \times 11$.

Também é natural que, depois de jogarem algum tempo, os alunos se apercebam de que há números que têm como divisores apenas o 1 e eles próprios, ou seja, têm decomposições limitadas. Por isso constituem a melhor escolha a fazer, de modo que a equipa adversária não junte pontos.

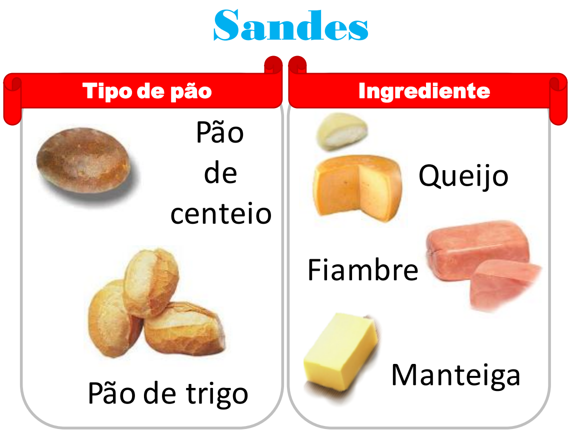
SEQUÊNCIA 2
-
MULTIPLICAÇÃO

Tópicos	Objectivos específicos	Notas	Tarefas	Organização temporal
Multiplicação	– Compreender a multiplicação no sentido combinatório[7].	– Sugerir o uso de estratégias e registos informais, recorrendo a desenhos, esquemas ou operações conhecidas[8].	Organizar menus	Tarefa para ser explorada durante cerca de 90 minutos. 1.ª Parte da tarefa: cerca de 15 minutos de resolução e 20 de discussão. 2.ª Parte da tarefa: cerca de 20 minutos de resolução e 35 de discussão.
	– Compreender, construir e memorizar as tabuadas da multiplicação – Utilizar estratégias de cálculo mental e escrito para a operação multiplicação usando as suas propriedades.	– Usar o conhecimento de tabuadas aprendidas anteriormente para o estudo de outras. – Construir as tabuadas da multiplicação do 7, 8, 9, 11 e 12.	Construir a tabuada do 8	Tarefa para ser explorada durante cerca de 90 minutos.
	– Utilizar estratégias de cálculo mental e escrito para a operação multiplicação usando as suas propriedades. – Resolver problemas que envolvam a multiplicação em contextos diversos.	– Propor aos alunos situações em que o modelo rectangular seja o adequado para resolver a situação. – Recorrer à propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.	Colocar azulejos	Tarefa para ser explorada durante cerca de 60 minutos. 1.ª Parte da tarefa: cerca de 20 minutos de resolução e 15 de discussão. 2.ª Parte da tarefa: cerca de 10 minutos de resolução e 15 de discussão.
	– Utilizar estratégias de cálculo mental e escrito para a operação multiplicação usando as suas propriedades. – Resolver problemas que envolvam a multiplicação em contextos diversos.	– Propor aos alunos situações em que o modelo rectangular seja o adequado para resolver a situação. – Usar estratégias como: ▪ Recorrer à propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição; ▪ Usar diferentes representações para o mesmo produto. – Pode surgir a utilização da fracção ½ entendida como operador.	Embalagens de garrafas de água	Tarefa para ser explorada durante cerca de 90 minutos (30 minutos de resolução e 60 de discussão)
	– Utilizar estratégias de cálculo mental e escrito para a operação multiplicação usando as suas propriedades.	– Usar estratégias como: ▪ Recorrer à propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição; ▪ Usar diferentes representações para o mesmo produto.	Relacionar para calcular	Tarefa para ser explorada durante cerca de 40 minutos. Deve ser retomada em dias diferentes.

[7] Embora no Programa de Matemática do Ensino Básico este objectivo seja referido nos 1.º e 2.º anos de escolaridade, considera-se importante que os alunos continuem, nos anos seguintes, a resolver problemas cujo sentido da multiplicação associado seja o sentido combinatório.
[8] Esta nota surge no Programa de Matemática do Ensino Básico relacionada com o objectivo "Compreender a multiplicação no sentido combinatório", para os 1.º e 2.º anos de escolaridade.

Organizar menus

Quantos tipos de sandes?



Quantos menus?

Atenção!

O sumo não pode ser da peça de fruta escolhida.

Tarefa 1 – Organizar menus

Materiais

- Fotocópias da folha da tarefa

Ideias disponíveis e em desenvolvimento

- Multiplicar usando a representação horizontal e recorrendo a estratégias de cálculo mental e escrito
- Resolver problemas que envolvam a multiplicação em diferentes contextos
- Utilizar estratégias de cálculo mental e escrito para a operação multiplicação usando as suas propriedades (nomeadamente, a propriedade comutativa)

Ideias e procedimentos a desenvolver

- Compreender a multiplicação no sentido combinatório
- Resolver problemas que envolvam a multiplicação no sentido combinatório
- Representar informação e ideias matemáticas de diversas formas

Sugestões para exploração

Esta tarefa tem como propósito trabalhar a multiplicação no seu sentido combinatório. A ideia é explorar inicialmente a primeira parte da tarefa – Quantos tipos de sandes? – durante cerca de 35 minutos (15 minutos de resolução e 20 minutos de discussão). Sugere-se que a segunda parte da tarefa – Quantos menus? – seja explorada durante cerca de 55 minutos (20 minutos de resolução e 35 minutos de discussão).

1.ª Parte

Os alunos são convidados a observar atentamente a imagem e pensar quantas sandes diferentes são possíveis fazer.

É natural que surja a discussão de quantos ingredientes podem ser usados na elaboração das sandes. De facto, as sandes podem incluir apenas um ingrediente, dois ou três de cada vez (ver sugestão de extensão da tarefa).

Nesta fase pretende-se que os alunos explorem a situação de usar um ingrediente de cada vez, respondendo à questão – Quantas sandes diferentes podem ser feitas com um ingrediente?

Os alunos devem responder a esta questão, organizados em grupos de 2 ou 3. Quando quase todos os grupos tiverem resolvido o problema, o(a) professor(a) deve generalizar a discussão, sugerindo que alguns apresentem e explicitem os seus processos de resolução.

Esta discussão, orquestrada pelo(a) professor(a), para além de ter como finalidade a discussão e reflexão sobre as estratégias usadas pelos alunos, tem ainda como objectivo, apresentar explicitamente modos de organizar informação. Se não surgir, da parte dos alunos, nenhum procedimento em que os dados estejam organizados em tabela ou através de um esquema em árvore, estes modos de organização devem ser apresentados pelo(a) professor(a), como procedimentos que facilitam a resposta à questão inicial. Ao recorrer a representações de ideias matemáticas que os alunos podem usar em outros contextos, o(a) professor(a) contribui para o desenvolvimento da comunicação matemática, uma das capacidades transversais valorizada no Programa de Matemática do Ensino Básico.

2.ª Parte

Depois de todo o trabalho realizado em torno da primeira parte da tarefa, é lançado o desafio *Quantos menus?* Os alunos têm de perceber que devem fazer diferentes tipos de menus, de acordo com um conjunto de condições, expressas nos placares:

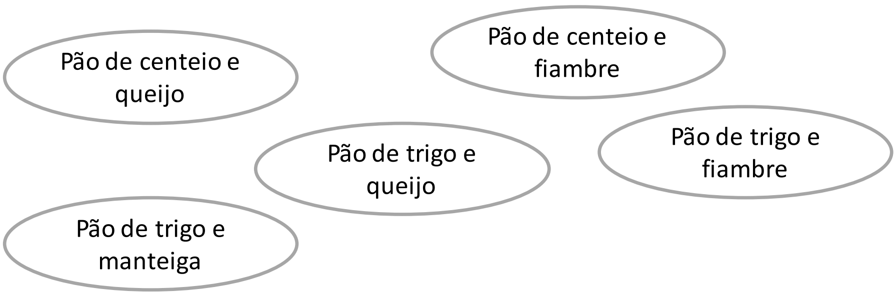
- *Cada menu inclui uma sandes, um sumo e uma peça de fruta;*
- *Os tipos de sandes diferentes correspondem aos identificados na situação anterior (com um ingrediente de cada vez);*
- *Os sumos podem ser de laranja e maçã;*
- *As peças de fruta podem ser laranja, maçã e banana;*
- *Se um menu incluir sumo de laranja não inclui a peça de fruta laranja;*
- *Se um menu incluir sumo de maçã não inclui a peça de fruta maçã.*

As condições devem ser identificadas em conjunto e, a partir daí os alunos, novamente, em grupo, resolvem o problema proposto. Após o tempo que o(a) professor(a) considerar adequado, procede-se à apresentação e discussão das estratégias utilizadas pelos vários grupos, comparando-as, relacionando-as e identificando as suas potencialidades. Para além disso é fundamental que o(a) professor(a) recorra às intervenções dos alunos e as aproveite para relacionar os processos utilizados com a operação multiplicação.

Possíveis caminhos a seguir pelos alunos

1.ª Parte

Na resolução do problema *Quantos tipos de sandes?*, utilizando apenas um ingrediente, os alunos podem seguir caminhos muito diversificados. Alguns fazem a representação através de desenhos, simulando os tipos de pão diferentes, o queijo, a manteiga e o fiambre. Estas representações podem ser organizadas de modo a sugerir um processo facilitador da contagem ou estarem dispersas na folha do aluno. Ilustra-se um exemplo em que as representações estão desorganizadas e incompletas.

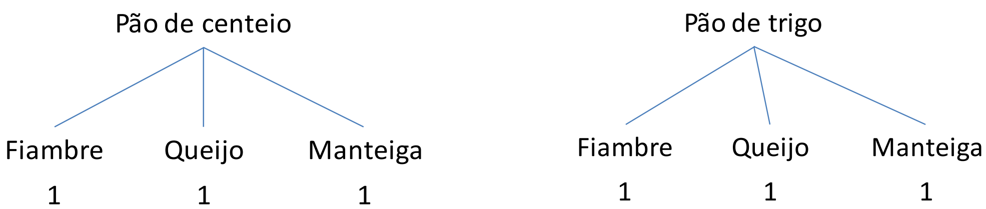


Um outro procedimento natural na resolução de problemas desta natureza é usar as palavras, de modo mais ou menos organizado, para representar e associar os diferentes tipos de pão e ingredientes, tal como se exemplifica:

- *Pão de centeio com queijo*
- *Pão de centeio com fiambre*
- *Pão de centeio com manteiga*
- *Pão de trigo com queijo*
- *Pão de trigo com fiambre*
- *Pão de trigo com manteiga*
- *3 + 3 = 6, há 6 tipos de sandes diferentes.*

Há alunos que usam uma representação em árvore.

Começando pelos tipos de pão:



Há 6 tipos de sandes diferentes, 3 de pão de centeio e 3 de pão de trigo, isto é, 3+3=6 ou 2×3=6.

Começando pelos ingredientes:

Queijo — Pão de centeio, Pão de trigo

Fiambre — Pão de centeio, Pão de trigo

Manteiga — Pão de centeio, Pão de trigo

Há 6 tipos de sandes diferentes, 2 com queijo, 2 com fiambre e 2 com manteiga, isto é, 2+2+2=6 ou 3×2=6.

É natural haver mais alunos que usem a expressão 2+2+2 e, nesse caso, o(a) professor(a) deve relacioná-la com o uso da multiplicação 3×2.

Os alunos podem usar esta mesma representação na horizontal e da esquerda para a direita, como no exemplo:

Queijo — Pão de centeio, Pão de trigo

Alguns alunos podem organizar os dados numa tabela, sobretudo se, anteriormente, já tiveram contacto com esta representação, por exemplo a propósito de tópicos relacionados com o tema Organização e Tratamento de Dados.

Ingredientes / Pão	Queijo	Fiambre	Manteiga
Pão de centeio	X	X	X
Pão de trigo	X	X	X

Os 6 tipos de sandes diferentes surgem da contagem directa dos cruzamentos linha/coluna ou coluna/linha ou pensando logo em termos da disposição rectangular: contando um a um, fazendo 2×3 ou 3×2.

A representação em tabela pode ser feita de outra maneira, começando pelos ingredientes.

Pão / Ingredientes	Pão de centeio	Pão de trigo
Queijo	X	X
Fiambre	X	X
Manteiga	X	X

Os 6 tipos de sandes diferentes surgem também da contagem directa dos cruzamentos linha/coluna ou coluna/linha, e podem pensar-se em termos da disposição rectangular, fazendo surgir 3×2 ou 2×3.

Tal como foi referido anteriormente, no caso destas duas últimas representações não surgirem naturalmente a partir dos procedimentos usados pelos alunos, o(a) professor(a) deve construí-los, por exemplo no quadro, evidenciando a facilidade de organização e de relacionamento dos dados entre si. A multiplicação surge associada à disposição rectangular. Em vez de serem contadas todas as combinações possíveis uma a uma, multiplica-se o número de linhas pelo número de colunas ou o número de colunas pelo número de linhas. Conforme o caso surge 3×2 ou 2×3, sendo este um bom pretexto para evidenciar a propriedade comutativa da multiplicação.

2.ª Parte

Espera-se que alguns grupos evoluam nos seus procedimentos de resolução do problema *Quantos menus?* sobretudo os que usaram processos mais informais e pouco organizados, uma vez que as estratégias relacionadas com o problema anterior foram apresentadas e discutidas em grande grupo pelo(a) professor(a) e pelos alunos. Os alunos que não conseguem usar procedimentos organizados têm mais dificuldade em identificar todas as combinações. Muitas vezes fazem alguns dos trios possíveis mas desorganizados, o que não lhes permite detectar as hipóteses que faltam.

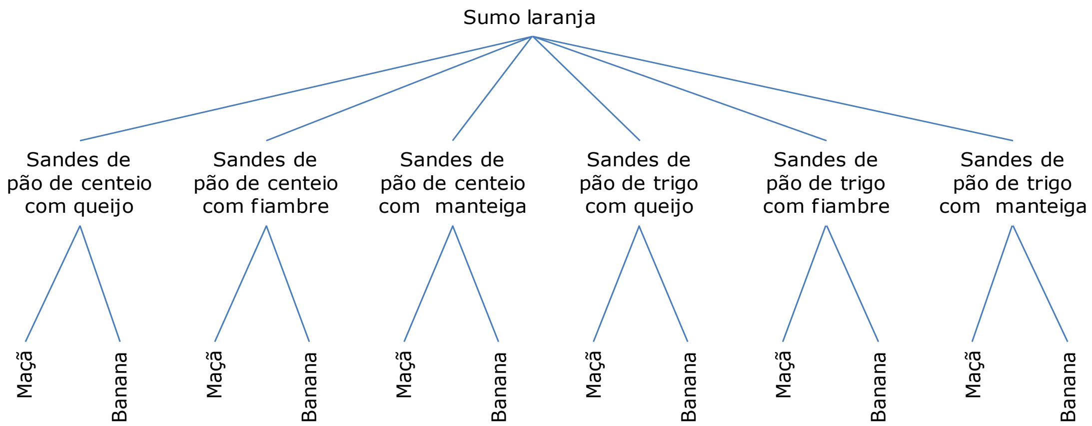
Os possíveis caminhos a seguir pelos alunos e que conduzem a respostas correctas, dependem de considerarem ou não, à partida, as condições associadas às relações entre sumos e peças de fruta. Estas impedem que a tarefa seja resolvida usando apenas a multiplicação dos diferentes tipos de dados envolvidos.

Os alunos podem excluir, de imediato, algumas situações. Podem considerar inicialmente o tipo de sumo e excluir as hipóteses com a fruta correspondente ou partir do tipo de fruta e excluir as hipóteses com o sumo correspondente.

Vejamos alguns procedimentos que podem ser usados pelos alunos, considerando inicialmente o tipo de sumo e excluindo as combinações com a fruta do mesmo tipo:

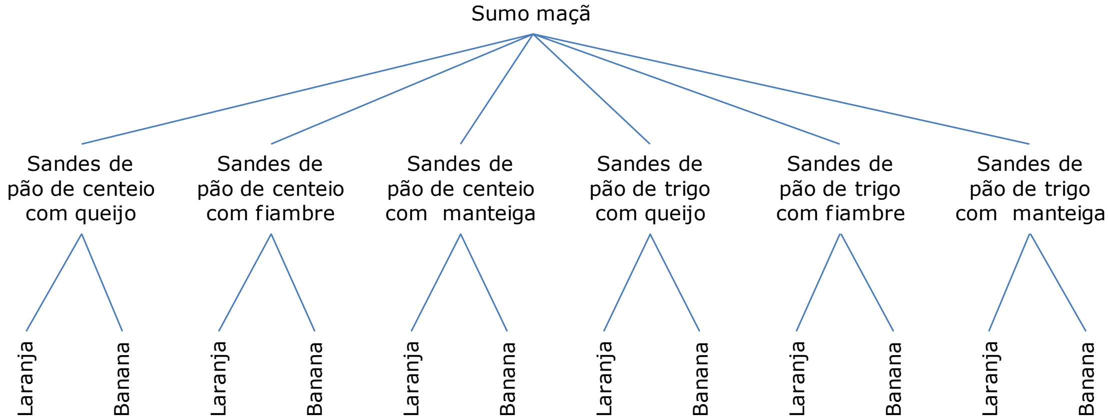
1. Recorrendo a um esquema em árvore

Menus com sumo de laranja



Há 12 menus com sumo de laranja. Podem ser contados um a um ou usando a multiplicação 1×6×2=12

Menus com sumo de maçã



Há 12 menus com sumo de maçã. Podem ser contados um a um ou usando a multiplicação $1\times6\times2=12$.

No total, há 12 menus com sumos de laranja e 12 menus com sumos de maçã, ou seja, 24 menus diferentes. Relacionando com a multiplicação obtém-se 24 menus através de $2\times6\times2$.

2. Recorrendo à construção de tabelas:

Menus com sumo de laranja

Sandes / Fruta	Centeio Queijo	Centeio Fiambre	Centeio Manteiga	Trigo Queijo	Trigo Fiambre	Trigo Manteiga
Maçã	X	X	X	X	X	X
Banana	X	X	X	X	X	X

Menus com sumo de maçã

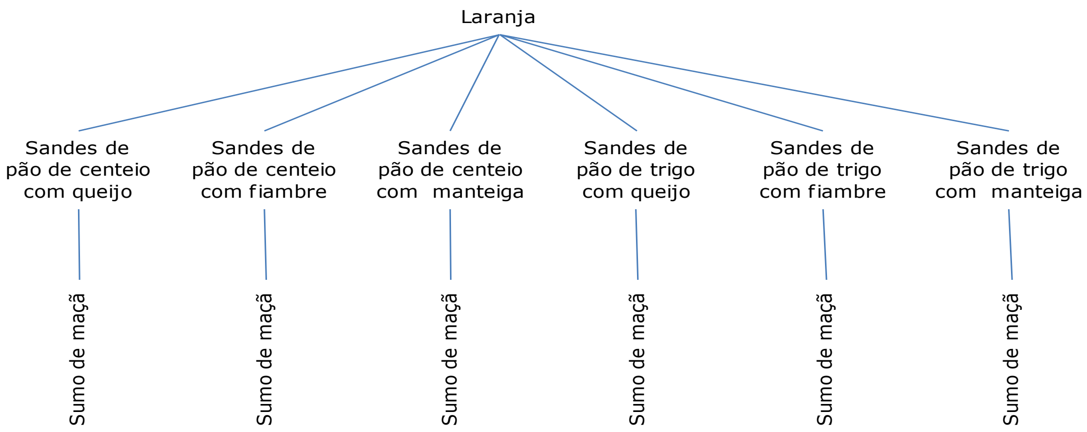
Sandes / Fruta	Centeio Queijo	Centeio Fiambre	Centeio Manteiga	Trigo Queijo	Trigo Fiambre	Trigo Manteiga
Laranja	X	X	X	X	X	X
Banana	X	X	X	X	X	X

À semelhança do exemplo anterior, no total, há 12 menus com sumo de laranja e 12 menus com sumo de maçã, ou seja, 24 menus diferentes. No caso das tabelas é mais fácil associar com a disposição rectangular com a multiplicação, efectuando 2 vezes 2×6 ou 2 vezes 6×2.

As expressões $2\times(6\times2)=24$ ou $2\times(2\times6)=24$ surgem em cada uma das tabelas, conforme se inicia o cálculo pela linha ou pela coluna.

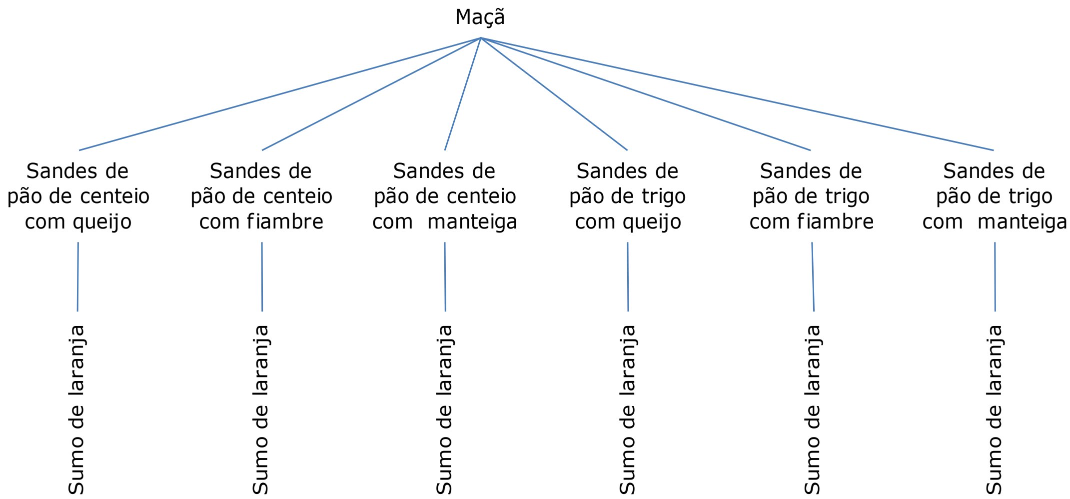
Vejamos, agora, a situação em que os alunos consideram inicialmente o tipo de fruta e excluem as combinações com o sumo do mesmo tipo, recorrendo, por exemplo, a um esquema em árvore:

Menus com laranja



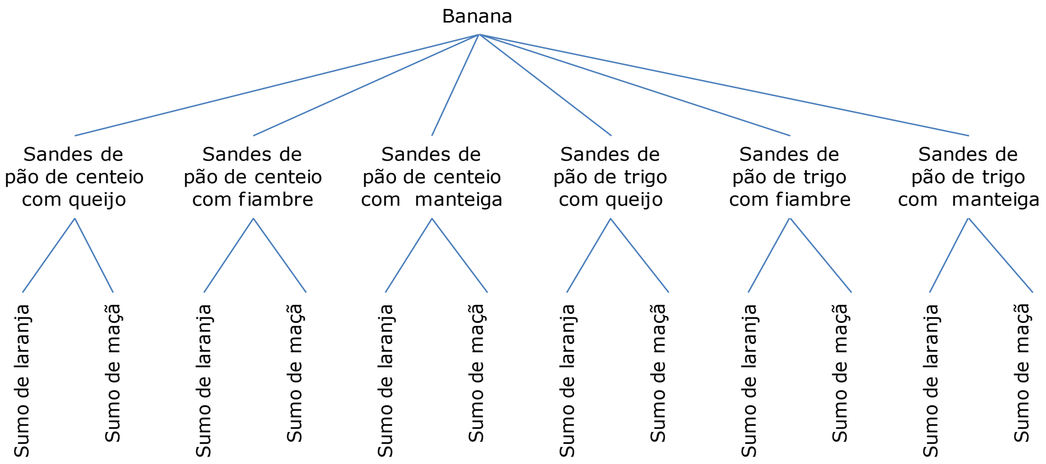
Há 6 menus com a fruta laranja. Podem ser contados um a um ou usando a multiplicação 1×6×1=6.

Menus com maçã



Há 6 menus com a fruta maçã. Podem ser contados um a um ou usando a multiplicação 1×6×1=6

Menus com banana



Há 12 menus com a fruta banana. Podem ser contados um a um ou usando a multiplicação $1\times6\times2=12$.
No total, há 6 menus com a peça de fruta laranja, 6 menus com a peça de fruta maçã e 12 menus com a peça de fruta banana, ou seja, 24 menus diferentes.

Podem, ainda, surgir resoluções que incluem todas as combinações possíveis com sumos, tipos de sandes e peças de fruta, excluindo no final as situações não permitidas. Exemplos de tabelas ilustrativas desta resolução podem ser:

Menus com sumos de laranja

Sandes / Fruta	Centeio Queijo	Centeio Fiambre	Centeio Manteiga	Trigo Queijo	Trigo Fiambre	Trigo Manteiga
Maçã	X	X	X	X	X	X
Banana	X	X	X	X	X	X
~~Laranja~~	~~X~~	~~X~~	~~X~~	~~X~~	~~X~~	~~X~~

Menus com sumos de maçã

Sandes / Fruta	Centeio Queijo	Centeio Fiambre	Centeio Manteiga	Trigo Queijo	Trigo Fiambre	Trigo Manteiga
Laranja	X	X	X	X	X	X
Banana	X	X	X	X	X	X
~~Maçã~~	~~X~~	~~X~~	~~X~~	~~X~~	~~X~~	~~X~~

As combinações a excluir de acordo com as condições do problema são as que estão cortadas. Em termos simbólicos a situação pode ser representada, em cada caso, por $3\times6-1\times6$ e nos dois casos por $2\times(3\times6-1\times6)$. Esta expressão é equivalente à encontrada na resolução anterior, isto é, $2\times(3\times6-1\times6) = 2\times(2\times6)$.

Extensão

Sugere-se que, num outro dia, seja retomada a exploração da primeira questão desta tarefa – *Quantas sandes?*, para os casos de se poderem usar dois e três ingredientes.

CONSTRUIR A TABUADA DO 8

Vamos construir a tabuada do 8					
1	×	8	=	8	Porque é o mesmo que 8×1
2	×	8	=	16	Porque é igual a 8+8, ou 8×2, ou é o dobro de 2×4
3	×	8	=	24	Porque é igual a 8×3 ou 3×8=2×8+1×8 ou 3×8=3×4×2, ou 3×8 é o dobro de 3×4
4	×	8	=	32	Porque 4×8=8×4 ou é igual a 2×2×8 ou 2×8+2×8 ou é o dobro de 4×4
5	×	8	=		
6	×	8	=		
7	×	8	=		
8	×	8	=		
9	×	8	=		
10	×	8	=		
11	×	8	=		
12	×	8	=		
…					
Continua a construir a tabuada do 8. Utiliza outros produtos teus conhecidos.					

Tarefa 2 – Construir a tabuada do 8

Materiais

- Fotocópias da folha da tarefa

Ideias disponíveis e em desenvolvimento

- Compreender, construir e memorizar as tabuadas do 2, 5, 10, 4, 3 e 6
- Multiplicar usando a representação horizontal e recorrendo a estratégias de cálculo mental e escrito

Ideias e procedimentos a desenvolver

- Compreender, construir e memorizar as tabuadas da multiplicação (neste caso, a do 8)
- Utilizar estratégias de cálculo mental e escrito para a operação multiplicação usando as suas propriedades (nomeadamente, a comutativa e a distributiva em relação à adição e à subtracção)

Sugestões para exploração

No 2.º ano foram construídas, formalizadas e memorizadas as tabuadas do 2, 5, 10, 4, 3 e 6. Depois da construção e memorização das tabuadas do 2, 5 e 10, os alunos, tiveram oportunidade de construir outras, recorrendo às primeiras. Por exemplo, a tabuada do 4 pode ser feita a partir da do 2 e a tabuada do 6 a partir da do 3, utilizando estratégias de cálculo associadas aos dobros. Também a propriedade comutativa da multiplicação pode ser utilizada frequentemente permitindo a relação entre os novos produtos a calcular e outros de tabuadas anteriormente construídas.

O objectivo desta tarefa é construir a tabuada do 8 recorrendo a produtos conhecidos das tabuadas anteriormente trabalhadas e ao uso das propriedades da multiplicação. Este trabalho deve ser feito individualmente ou a pares, devendo o(a) professor(a) propor aos alunos a construção desta tabuada, a partir de relações numéricas que estes consigam estabelecer com outros produtos que já conhecem. A exploração desta tarefa ocupa cerca de 90 minutos.

Os alunos devem ser incentivados a justificar, na sua folha de trabalho, as relações que estabelecem para efectuar os cálculos pretendidos. Quando quase todos os alunos tenham registado, pelo menos os primeiros 12 produtos, deve haver um momento de discussão e síntese em grupo-turma. O seu objectivo é analisar as várias maneiras de calcular o mesmo produto, recorrendo a diferentes propriedades da multiplicação, ainda que de modo informal, para justificar os cálculos realizados. Na discussão, o(a) professor(a) pede a alguns alunos que, oralmente, expliquem aos colegas o raciocínio que efectuaram para chegar a determinado produto. Estas justificações são baseadas nas propriedades da multiplicação. É objectivo deste nível de escolaridade que os alunos as saibam utilizar de forma adequada, sem se pretender que as saibam nomear.

O(a) professor(a), à medida que solicita justificações sobre o modo de obter cada um dos produtos da tabuada, deve escrever no quadro as expressões matemáticas associadas ao discurso dos alunos. É fundamental que use linguagem simbólica correcta, traduzindo o que os alunos dizem oralmente. Assim, estes vão-se habituando a ler e interpretar informação escrita usando a linguagem própria da Matemática.

Um aspecto bastante importante e associado à construção de qualquer tabuada é que os alunos adquiram a noção que as tabuadas "não acabam no 10×". Assim, é fundamental desafiar os alunos a procurar produtos cada vez maiores, não parando, neste caso particular, no 10×8. Deste modo, vão sendo estabelecidas relações entre as tabuadas e os múltiplos de um número natural.

Posteriormente, num outro dia, deve ser proposto aos alunos, individualmente ou organizados em pares, o mesmo tipo de trabalho para a construção de novas tabuadas, nomeadamente a do 9, do 11 e do 12.

Possíveis caminhos a seguir pelos alunos

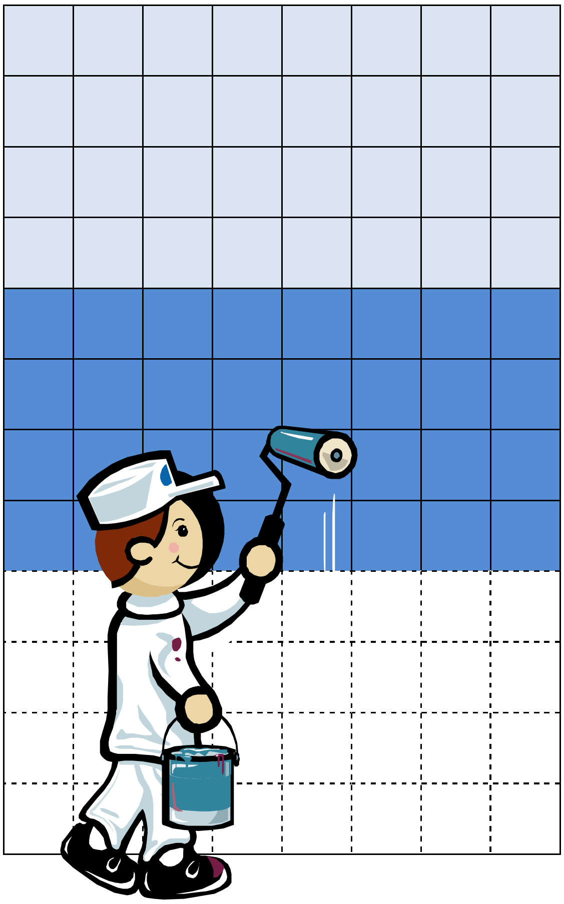
Inicialmente, alguns alunos têm tendência para calcular os diferentes produtos utilizando apenas estratégias aditivas. Por exemplo, podem calcular 4×8 adicionando 8+8+8+8 sucessivamente ou associando as parcelas duas a duas ou recorrendo a 24+8, pensando que 4×8 corresponde a adicionar 8 ao produto anterior da tabuada, 3×8. Na partilha e discussão com toda a turma, o(a) professor(a) deve realçar as estratégias que se baseiam na multiplicação e não apenas na adição, como tradicionalmente se fazia. De facto, pensar em termos multiplicativos favorece o desenvolvimento do cálculo associado a esta operação e promove a utilização das suas propriedades de modo flexível e de acordo com os números envolvidos.

Eis alguns exemplos de diferentes cálculos dos produtos da tabuada do 8 associados, sobretudo, a estratégias multiplicativas e, naturalmente, relacionados com as propriedades da multiplicação:

- *1 × 8 = 8 (é um facto conhecido ou é igual a 8×1)*
- *2 × 8 = 16 (porque é 8+8, ou é igual a 8×2, ou é o dobro de 2×4)*
- *3 × 8 = 24 (porque é igual a 8×3 ou 2×8+1×8 ou 3×4×2, ou é o dobro de 3×4)*
- *4 × 8 = 32 (porque é igual a 8×4 ou 2×2×8 ou 2×8+2×8, ou é o dobro de 4×4)*
- *5 × 8 = 40 (porque é 8×5 ou é metade de 10×8 ou é 5×4+5×4 ou 5×4×2)*
- *6 × 8 = 48 (porque é 5×8+8 ou é o 2×3×8 ou 3× 8+3×8 ou é igual a 8×6)*
- *7 × 8 = 56 (porque é igual a 5×8+2×8 ou 4×8+3×8 ou 6×8+8)*
- *8 × 8 = 64 (porque é igual a 2×4×8 ou 4×8+4×8 ou 2×8+6×8)*
- *9 × 8 = 72 (porque é igual a 10×8–8 ou 8×8+8 ou 5×8+4×8)*
- *10 × 8 = 80 (porque é igual a 8×10 ou 5×8+5×8)*
- *11 × 8 = 88 (porque é igual a 10×8+8 ou é 5×8+6×8)*
- *12 × 8 = 96 (porque é igual a 10×8+2×8 ou é 6×8+6×8 ou 2×6×8 ou 4×8+8×8)*
- *16 × 8 = 128 (porque é igual a 2×8×8 ou 10×8+6×8 ou 4×4×8 ou 8×8+8×8)*
- *19 × 8 = 152 (porque é igual a 20×8-1×8 ou 10×8+9×8)*

Colocar azulejos

1. Na escola do André, o Sr. João está a colocar azulejos, com dois tons de azul, numa parede do complexo desportivo, tal como mostra a figura.



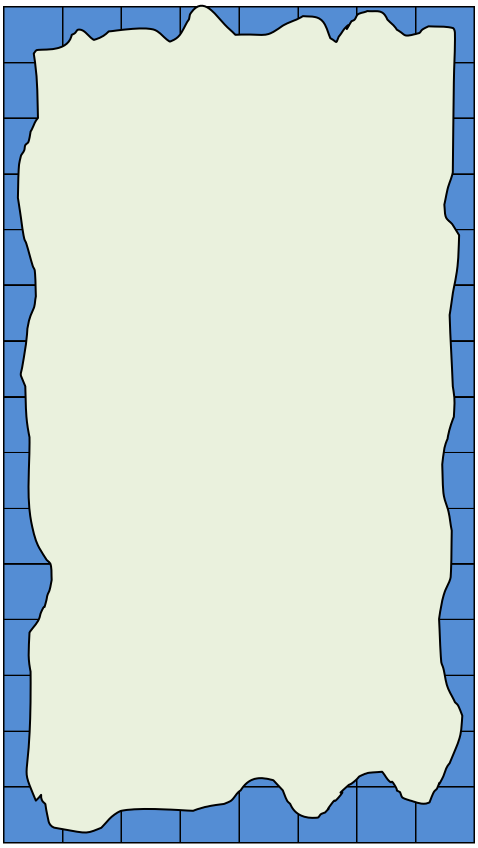
Quantos azulejos já colocou o Sr. João? Explica como pensaste.

Quantos azulejos faltam colocar ainda na parede? Explica como pensaste.

Quando terminar, quantos azulejos terá colocado o Sr. João? Explica como pensaste.

COLOCAR AZULEJOS

2. Uma outra parede com azulejos foi danificada pela humidade e alguns azulejos caíram. Quantos azulejos precisam de ser novamente colocados? Explica como pensaste.



Tarefa 3 – Colocar azulejos

Materiais

- Fotocópias das folhas da tarefa

Ideias disponíveis e em desenvolvimento

- Compreender, construir e memorizar as tabuadas do 2, 5, 10, 4 e 8
- Multiplicar utilizando a representação horizontal e recorrendo a estratégias de cálculo mental e escrito

Ideias e procedimentos a desenvolver

- Resolver problemas que envolvam a multiplicação em contextos diversos
- Utilizar estratégias de cálculo mental e escrito da operação multiplicação usando as suas propriedades (nomeadamente, a comutativa e a distributiva em relação à adição e à subtracção)

Sugestões para exploração

Com esta tarefa pretende-se recorrer a um contexto que parte do modelo rectangular tendo como finalidade o uso, por parte dos alunos, de diferentes estratégias de cálculo associadas à multiplicação.

O(A) professor(a) deve propor as duas partes da tarefa em separado, pedindo aos alunos que resolvam as várias questões associadas e que justifiquem o modo como pensaram. Depois de os alunos, individualmente ou a pares, resolverem as questões que constituem a primeira parte da tarefa (cerca de 20 minutos), segue-se um momento de discussão colectiva orientada pelo(a) professor(a) (cerca de 15 minutos). O objectivo desta discussão é identificar e relacionar as diferentes estratégias usadas pelos alunos, realçar as mais potentes e sistematizar algumas ideias e procedimentos associados a propriedades da multiplicação.

Depois da discussão da primeira parte da tarefa, deve ser proposta aos alunos a realização da segunda parte, havendo novamente um momento de resolução individual ou a pares (cerca de 10 minutos). Esta nova situação, com um contexto muito semelhante à primeira, sugere estratégias de resolução análogas às usadas anteriormente. Uma vez que na discussão com toda a turma, a propósito da primeira parte da tarefa, foram realçadas estratégias mais potentes, é fundamental que o(a) professor(a) perceba se os alunos as compreenderam e as utilizam neste novo problema.

Na primeira parte da tarefa ainda pode haver alunos que contam os azulejos em cada linha, sucessivamente, 8, 16, 24, …, outros que usam procedimentos aditivos, fazendo 8+8 são 16, 16+8 são 24, …ou até que contam um a um todos os azulejos.Na segunda parte da tarefa este tipo de procedimentos não é incentivado pela figura que a apoia. De facto, como há um bocado da parede sem azulejos, os alunos não os têm disponíveis para contar ou adicionar, sendo por isso fortemente sugerido pelo contexto o uso de procedimentos multiplicativos.

Mais uma vez, após a resolução da 2.ª parte da tarefa, deve haver um momento de discussão colectiva orientado pelo(a) professor(a) (cerca de 15 minutos). O seu propósito é, novamente, identificar as diferentes estratégias usadas pelos alunos, compará-las entre si e destacar as mais potentes e que são, naturalmente, as que se socorrem da operação multiplicação e das suas propriedades.

Possíveis caminhos a seguir pelos alunos

1.ª Parte

Na resolução da primeira parte desta tarefa podem surgir diferentes estratégias usadas pelos alunos, desde as mais informais e pouco eficazes, como a contagem um a um dos azulejos, até às mais formais e potentes, associadas à multiplicação.

Azulejos já colocados:

De facto, há alunos que em qualquer questão da primeira parte da tarefa, procedem à contagem um a um dos azulejos, uma vez que a sua totalidade é sempre um número menor que uma centena. Outros recorrem à contagem do número de azulejos numa linha ou numa coluna, efectuando contagens de 8 em 8 ou adicionando repetidamente o 8 ou, no caso de atenderem à diferença de tom de azul em coluna, podem efectuar contagens de 4 em 4 ou adicionar repetidamente o 4. Assim, os alunos podem usar procedimentos tais como:

- *Contar de 8 em 8, fazendo 8, 16, 24, 32, … até 64*
- *Adicionar repetidamente 8 fazendo 8 + 8 = 16; 16 + 8 = 24, 24 + 8 = 32, …, até ao 64*
- *Adicionar as parcelas duas a duas fazendo*

$$8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 = 64$$

16 16 16 16

32 32

64

No caso de calcularem separadamente o número de azulejos com diferentes tons de azul, podem usar procedimentos semelhantes aos anteriores mas, em vez de usarem a parcela 8, usam a parcela 4, obtendo 32 azulejos com o mesmo tom de azul. O número total de azulejos é obtido adicionando 32 + 32.

Há alunos que recorrem à multiplicação e, não atendendo à diferença de tom de azul dos azulejos, contam o número de azulejos em linha e em coluna, dizendo:

- *São 8 colunas, cada uma com 8 azulejos, por isso são 8 × 8*
- *São 8 linhas, cada uma com 8 azulejos, por isso são 8 × 8*

O produto 8 × 8, pode ser, por sua vez, calculado de diferentes modos – de forma automática, se for um produto já memorizado da tabuada do 8, transformando a multiplicação em adição e usando um procedimento semelhante aos descritos anteriormente ou através de procedimentos multiplicativos. Neste último caso, é natural que surjam modos de raciocinar como se exemplifica:

- *8 × 8 = 64*
  porque é o dobro de 4 × 8 ou 8 × 8 = 2 × 4 × 8 = 2 × 32 = 64

- *8 × 8=64*
  porque é igual a 4 × 8 + 4 × 8 ou
  8 × 8 = 4 × 8 + 4 × 8 = 32 + 32 = 64 ou,
  trocando a ordem dos factores, é igual a 8 × 4 + 8 × 4 ou
  8 × 8 = 8 × 4 + 8 × 4

- *8 × 8=64 porque 8 × 8 = 10 × 8 – 2 × 8 = 80 - 16*

Nos dois primeiros exemplos estão subjacentes estratégias relacionadas com o uso dos dobros baseadas nas propriedades comutativa e distributiva da multiplicação em relação à adição. No último exemplo, os alunos utilizam o produto de referência 10 × 8, e recorrem a uma estratégia de compensação, que tem subjacente a propriedade distributiva da multiplicação em relação à subtracção.

É de notar que foram explicitadas estratégias multiplicativas, partindo do 8 × 8. No entanto, o facto de os azulejos estarem pintados em dois tons de azul pode levar alguns alunos a calcular primeiro 4 × 8 ou 8 × 4 e, em seguida, o seu dobro ou a adicionar duas vezes este produto.

Azulejos que faltam colocar:

No cálculo dos azulejos que faltam colocar, para além do uso de procedimentos de contagem ou aditivos, semelhantes aos já apresentados, podem surgir ainda dois tipos de situações – ou os alunos já calcularam 4 × 8 na questão anterior porque identificaram à partida os dois tons de azul ou já calcularam o produto 8 × 8.

Na primeira situação a resposta é imediata, uma vez que é igual ao resultado obtido anteriormente.

Na segunda situação os alunos podem observar que o número de linhas de azulejos que faltam colocar é metade do número de linhas de azulejos já colocados, chegando à conclusão que faltam colocar 32 azulejos, porque 32 é metade de 64. Podem também aparecer as seguintes representações:

- *$^1/_2$ de 64 é igual a 32 porque 64 : 2 = 32 ou porque 2 × 32 = 64*

Podem também realizar o cálculo 4×8, recorrendo a produtos conhecidos tanto da tabuada do 4 como do 8, dos seguintes modos:

- *4 × 8 é igual a 32 porque sei a tabuada do 8*
- *4 × 8 é o mesmo que 8 × 4, relacionando com a tabuada do 4*
- *4 × 8 é duas vezes 2 × 8, usando o dobro*
- *4 × 8 é metade de 8 × 8 porque 8 × 8 = 2 × 4 × 8 ou porque 8 × 8 = 4 × 8 + 4 × 8*

Número total de azulejos:

Os alunos podem seguir dois tipos de estratégias: adicionam os totais resultantes das respostas às questões anteriores ou calculam o número total de azulejos considerando o número de azulejos em linha e em coluna. O(A) professor(a), na discussão colectiva, deve relacionar entre si as diferentes estratégias usadas pelos alunos.

Estratégias que têm em conta as questões anteriores, ou seja, que o total de azulejos é igual à soma do número de azulejos de cada uma das duas (ou três) partes, já calculado:

- *64 + 32 ou 32 + 32+ 32 ou 3 × 32*
- *8 × 8 + 4 × 8 ou 4 × 8 + 4 × 8 + 4 × 8 (considerando os dois tons de azul) ou 3 × 4 × 8*

Estratégias que não têm em conta os totais parciais obtidos nas questões anteriores. Neste caso, determinam o número total de azulejos considerando a parede como um todo, usando estratégias tais como:

- *Adicionando repetidamente 8, 8 + 8 + 8 + 8+… porque são 12 linhas de 8 azulejos*
- *Adicionando repetidamente 12, 12 + 12 + 12 + 12 +… porque são 8 colunas, cada uma com 12 azulejos*
- *Multiplicando 12 × 8 ou 8 × 12, recorrendo à propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição:*
    - *12 × 8 = 8 × 8 + 4 × 8 ou 8 × 12 = 8 × 8 + 8 × 4 usando produtos já conhecidos ou já calculados*
    - *12 × 8 = 10 × 8 + 2 × 8 (recorrendo à decomposição decimal do 12)*
    - *12 × 8 = 6 × 8 + 6 × 8 (recorrendo a uma decomposição não decimal do 12, 6 + 6)*

Todos os produtos que forem calculados devem ser relacionados com as tabuadas já conhecidas dos alunos, sobretudo com as tabuadas do 8 e do 4. Também as diferentes estratégias multiplicativas devem ser discutidas e relacionadas entre si.

Os exemplos apresentados têm subjacente o cálculo do número de azulejos em cada linha (8) e depois o número de linhas, mas os alunos podem começar por contar os azulejos em cada coluna e contar depois o número de colunas. Neste caso, as multiplicações resultantes têm trocada a ordem dos factores em relação às exemplificadas.

Relativamente ao cálculo do número total de azulejos colocados na parede é importante que os alunos percebam que os factores do produto 12 × 8 (ou 8 × 12) correspondem, respectivamente, ao número de azulejos em coluna e em linha (ao contrário se nos estivermos a referir a 8 × 12), não sendo necessário contar nem todas as linhas nem todas as colunas, mas apenas o número de azulejos na primeira coluna e na primeira linha.

Note-se que em todas as questões da 1.ª parte da tarefa o cálculo por colunas ou por linhas constitui uma boa oportunidade para os alunos terem evidências concretas da propriedade comutativa da multiplicação. De facto, a partir de uma certa altura, os alunos utilizam com bastante frequência esta propriedade da multiplicação mas, muitas vezes, não compreendem realmente porque é que ela "funciona". A exploração de um contexto associado à disposição rectangular permite "ver" que a propriedade comutativa da multiplicação é válida em qualquer conjunto numérico.

2.ª Parte

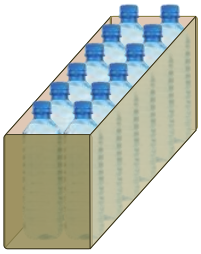
Na resolução da segunda parte da tarefa, proposta após a discussão das questões da primeira parte com toda a turma, pretende-se que os alunos usem estratégias multiplicativas. O contexto que suporta a tarefa baseia-se na disposição rectangular, e, uma vez que os azulejos da parede, não estão todos visíveis, dificulta o uso de estratégias de contagem ou aditivas, sugerindo o recurso à operação multiplicação. Deste modo, os alunos têm tendência a utilizar estratégias multiplicativas envolvendo, mais uma vez, o factor 8. Para além do contexto da tarefa, o conhecimento mobilizado na discussão que decorreu a propósito da 1.ª parte, pode ser rentabilizado nas estratégias que os alunos utilizam para resolver esta nova situação. Assim, para calcular o produto 15 × 8 (ou 8 × 15) podem surgir as seguintes estratégias:

- *15 × 8 = 10 × 8 + 5 × 8 = 80 + 40 =120 (usando a decomposição decimal do 15)*
- *15 × 8 = 12 × 8 + 3 × 8 = 96 + 24 = 120 (decompondo o 15 em 12 +3 e recorrendo ao produto 12 × 8 calculado na 1.ª parte)*
- *15 × 8 = 4 × 8 + 4 × 8 + 4 × 8 + 3 × 8 (decompondo o 15 em 4 + 4 + 4 + 3 e recorrendo ao produto 4 × 8 calculado na questão anterior)*
- *15 × 8 = 8 × 8 + 7 × 8 (decompondo o 15 em 8 + 7 e usando dois produtos conhecidos da tabuada do 8)*
- *15 × 8 = 15 × 10 – 15 × 2 = 150 - 30 (recorrendo a um múltiplo de 10 e compensando, tendo subjacente o uso da propriedade distributiva da multiplicação em relação à subtracção)*

Extensão

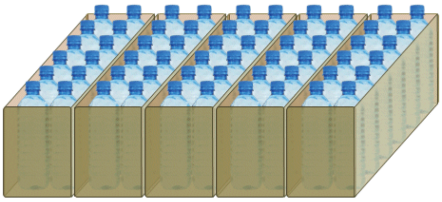
A ideia base da questão 2 desta tarefa pode ser usada em situações em que a parede de azulejos tem dimensões superiores. Também pode ser modificada criando situações em que a mancha de humidade não atinge todos os azulejos.

EMBALAGENS DE GARRAFAS DE ÁGUA

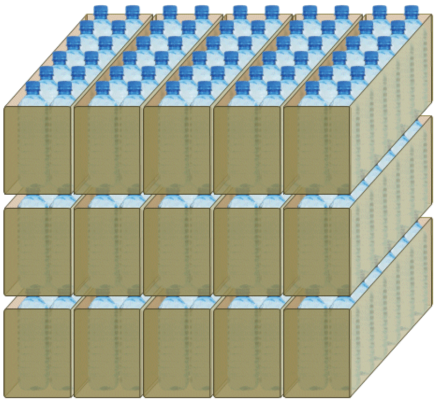


Na semana desportiva da cidade Verde foram realizados jogos de diferentes modalidades. A organização dos jogos disponibilizou aos atletas embalagens com doze garrafas de água cada, como a da figura.

1. Aos jogadores de ténis foram oferecidas as embalagens representadas na figura ao lado. Quantas garrafas de água foram oferecidas? Explica como pensaste.

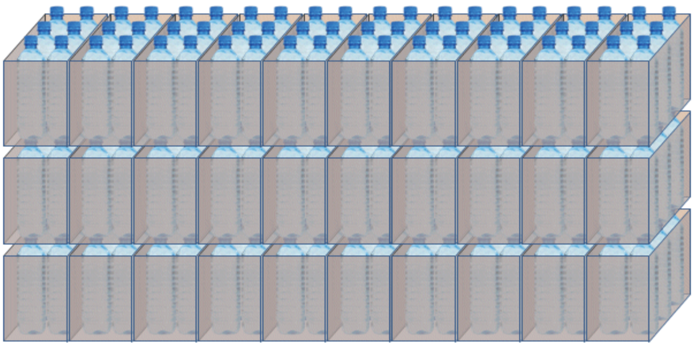


2. Aos jogadores de futebol foram oferecidas as embalagens de garrafas de água representadas na figura seguinte. Quantas garrafas de água foram oferecidas? Explica como pensaste.



EMBALAGENS DE GARRAFAS DE ÁGUA

3. Como se esgotaram as embalagens de 12, as águas oferecidas aos jogadores de xadrez vinham em embalagens de 6 garrafas. Foram oferecidas 30 embalagens. Quantas garrafas de água foram oferecidas? Explica como pensaste.



Tarefa 4 – Embalagens de garrafas de água

Materiais

- Fotocópias das folhas da tarefa

Ideias disponíveis e em desenvolvimento

- Compreender, construir e memorizar as tabuadas da multiplicação
- Multiplicar utilizando a representação horizontal e recorrendo a estratégias de cálculo mental e escrito

Ideias e procedimentos a desenvolver

- Resolver problemas que envolvam a multiplicação em contextos diversos
- Utilizar estratégias de cálculo mental e escrito para a operação multiplicação usando as suas propriedades (nomeadamente, a comutativa, a associativa e a distributiva em relação à adição)
- Usar diferentes representações para o mesmo produto

Sugestões para exploração

Nesta tarefa recorre-se a um contexto que faz parte da experiência dos alunos e que estes podem facilmente compreender – as garrafas de água, para além de se venderem à unidade, são disponibilizadas também em embalagens com diversas quantidades, como por exemplo, de 6 e 12 garrafas.

Sugere-se que esta tarefa seja explorada durante cerca de 90 minutos, correspondendo cerca de 30 minutos à sua resolução e 60 à discussão.

A tarefa é constituída por três problemas que envolvem a multiplicação e que estão relacionados entre si tanto pelo contexto como pelos números envolvidos. As imagens que acompanham cada um dos problemas podem sugerir diferentes estratégias a usar pelos alunos e, nesse sentido, o(a) professor(a) deve aconselhar a observação atenta do modo como estão empilhadas as diferentes embalagens de água.

Depois de apresentado muito brevemente o contexto da tarefa, os alunos devem resolver os problemas a pares explicitando o modo como pensaram. No final da resolução dos três problemas deve ser organizada uma discussão orientada pelo(a) professor(a), na qual alguns alunos apresentem aos colegas as suas resoluções. Para isso, enquanto os pares resolvem os vários problemas o(a) professor(a) deve aperceber-se do tipo de estratégias que estão a ser utilizadas de forma a seleccionar as que, na discussão final, devem ser apresentadas e discutidas.

Para além da selecção dos modos de resolução dos alunos, o(a) professor(a) deve também pensar antecipadamente qual a ordem pela qual os alunos devem apresentar as suas resoluções. As apresentações e discussões daí decorrentes devem ser realizadas partindo da estratégia mais informal para a mais formal, possibilitando o estabelecimento de relações entre elas e realçando as que têm subjacentes a utilização de propriedades da multiplicação, naturalmente, as mais potentes. Deste modo os pares que utilizaram estratégias pouco eficazes, recorrendo, por exemplo à adição podem, com a ajuda dos colegas e do(a) professor(a), estabelecer pontes entre o que fizeram e outros procedimentos multiplicativos, compreendendo a vantagem do seu uso.

A imagem das embalagens de garrafas de água, organizadas intencionalmente de determinada maneira, sugere o recurso a determinadas estratégias multiplicativas. No caso do primeiro problema os alunos podem perceber que, uma vez que as cinco embalagens estão colocadas umas junto às outras, as garrafas estão ordenadas em linhas de 10 e que há 6 linhas, havendo portanto 6 linhas de 10 garrafas.

No caso do 2.º problema, os alunos podem compreender que o número de embalagens e, consequentemente, o número de garrafas, é o triplo do número calculado no 1.º problema pois a observação da imagem correspondente evidencia três "camadas" de embalagens iguais à do 1.º problema.

No que se refere ao 3.º problema, a imagem associada também pode sugerir várias formas de calcular o número de garrafas. De um determinado ponto de vista, sugere o cálculo do número de garrafas por "camadas", uma vez que cada "camada" tem 10 embalagens e que, em cada "camada", se visualizam as garrafas por linhas, havendo 20 garrafas em cada linha. Deste modo pode recorrer-se ao uso de múltiplos de 10 na realização do cálculo do número total de garrafas.

Observando a mesma imagem segundo uma outra perspectiva, visualiza-se que o número de embalagens é o dobro das embalagens do problema anterior. Esta observação sugere, num primeiro momento que, se o número de embalagens é o dobro do anterior, então o número total de garrafas pode, também, ser o dobro. No entanto, o enunciado deste problema refere que as embalagens, agora, não têm o mesmo número de garrafas, têm apenas 6, que é metade de 12. Então, se o número de embalagens é o dobro e o número de garrafas por embalagem é metade do anterior, o número total de garrafas mantém-se igual. Esta relação, do dobro de embalagens e da metade do número de garrafas por embalagem, mantendo o número total de garrafas, não é facilmente estabelecida pelos alunos. No entanto, o(a) professor(a), durante a discussão final, no caso da relação dobro/metade não ser identificada por algum dos pares de alunos, deve desafiá-los a justificar o facto das expressões 15×12 e 30×6, resultantes do 2.º e do 3.º problema, respectivamente, serem ambas iguais a 180.

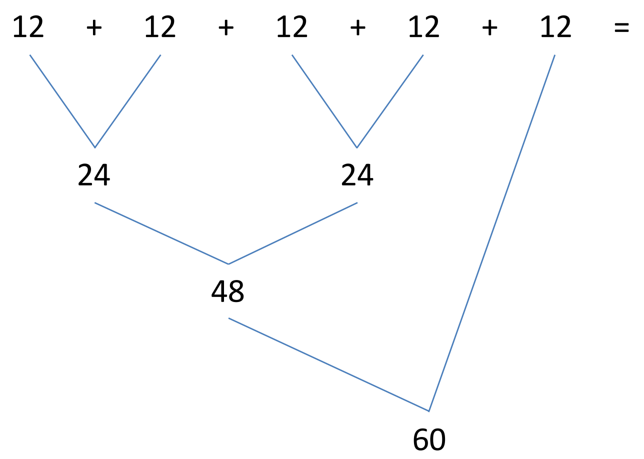
Possíveis caminhos a seguir pelos alunos

1.º Problema

Face aos números envolvidos neste problema, pode haver alunos que ainda persistam no uso de procedimentos aditivos.

Se pensarem nas 12 garrafas de cada embalagem os alunos realizam a adição de cinco parcelas iguais a 12, que pode ser efectuada de duas maneiras:

- *Adicionando sucessivamente fazendo 12 + 12 = 24; 24 + 12 = 36; …*
- *Adicionando as parcelas duas a duas*



No caso de observarem a primeira figura e identificarem as 6 linhas de 10 garrafas podem contar de 10 em 10 ou usar procedimentos aditivos idênticos aos apresentados para realizar as seguintes adições:

- *10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 (adicionando as garrafas de cada linha)*
- *6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 (adicionando as garrafas em coluna)*

Outros alunos, pensando em 5 embalagens de 12 garrafas, recorrem a estratégias multiplicativas e podem fazer:

- *5 × 12 = 5 × 10 + 5 × 2 = 50 + 10 = 60 (recorrendo à decomposição decimal do 12)*

Atendendo à disposição das embalagens e das garrafas, os alunos podem usar também a multiplicação e calcular do seguinte modo:

- *6 × 10 porque são 6 linhas de 10 garrafas*
- *10 × 6 porque são 10 colunas de 6 garrafas*

2.º Problema

Apesar de poderem persistir estratégias aditivas do tipo das exemplificadas no 1.º problema, não é tão natural que isso aconteça, pois a grandeza dos números dificulta o seu uso.

Exemplificamos em seguida as estratégias multiplicativas que os alunos podem usar.

Se relacionarem com o problema anterior os alunos podem fazer:

- *3 × 60, porque são 3 "camadas" de embalagens*
- *3 × 60 é o mesmo que 3 × 6 × 10 = 18 × 10 = 180 ou*
- *3 × 60 é o mesmo que 3 × 50 + 3 × 10 = 150 + 30 = 180*

A partir da observação da imagem os alunos podem fazer:

- *3 × (6 × 10) ou 3 × (10 × 6) (pensando no triplo de garrafas de uma "camada")*
- *6 × 10 + 6 × 10 + 6 × 10 ou 10 × 6 + 10 × 6 + 10 × 6 (adicionando o número de garrafas de cada "camada")*
- *3 × 5 × 12 (pensando em 3 "camadas" de 5 embalagens de 12 garrafas)*

Os alunos podem resolver o problema sem o relacionar com o anterior, pensando que são 15 embalagens de 12 garrafas, que representam por 15×12. Este cálculo, por sua vez, pode ser realizado de várias maneiras:

- *15 × 12 = 15 × 10 + 15 × 2 = 150 + 30 (recorrendo à decomposição decimal do 12)*
- *15 × 12 = 10 × 12 + 5 × 12 = 120 + 60 (recorrendo à decomposição decimal do 15)*
- *15 × 12 = 3 × 5 × 12 = 3 × 5 × 12 = 3 × 60 (transformando o 15 em 3 × 5)*

3.º Problema

Na resolução deste problema os alunos podem usar estratégias semelhantes às anteriores, tendo subjacentes raciocínios idênticos mas tendo em conta que cada embalagem tem agora apenas 6 garrafas. Vamos exemplificar as que podem ser diferentes e que decorrem do modo como estão organizadas as embalagens de garrafas.

As 3 "camadas" têm 3 linhas de 20 garrafas

- *$3 \times 3 \times 20 = 3 \times 60$ ou $3 \times 20 + 3 \times 20 + 3 \times 20 = 60 + 60 + 60$*

Cada "camada" tem 10 embalagens, cada uma com 6 garrafas, logo os alunos podem fazer:

- *$3 \times 10 \times 6$ ou seja 3×60 ou 30×6*

Há 10 colunas de 3 embalagens empilhadas, cada uma com 6 garrafas, por isso os alunos podem fazer:

- *$10 \times 3 \times 6 = 10 \times 18 = 180$*

Há 30 embalagens, cada uma com 6 garrafas, por isso há:

- *$30 \times 6 = 3 \times 10 \times 6 = 3 \times 60 = 180$ garrafas*

Se os alunos relacionarem o número de embalagens de garrafas de água e o número de garrafas por embalagem deste problema com os do anterior, podem identificar que o número de embalagens duplica e o número de garrafas por embalagem passa para metade. Podem assim pensar que:

- *Se 15 embalagens de 12 têm um total de 180 garrafas então 30 embalagens de 6 também têm um total de 180 garrafas (porque 30 é o dobro de 15 e 6 é metade de 12, ou seja, $15 \times 12 = 30 \times 6$).*

Relacionar para calcular

Observa as expressões seguintes. Começa por uma que saibas calcular o seu valor e coloca-a na tabela, em baixo. Continua a calcular outros produtos, relacionando-os sempre com os que calculaste anteriormente. Justifica o modo como efectuaste cada cálculo.

4x6=

16x6=

8x12=

8x6=

4x12=

	Porque

Faz de igual modo para as expressões seguintes.

49x8=

2x8=

9x8=

50x8=

40x8=

52x8=

	Porque

RELACIONAR PARA CALCULAR

Observa as expressões seguintes. Começa por uma que saibas calcular o seu valor e coloca-a na tabela, em baixo. Continua a calcular outros produtos, relacionando-os sempre com os que calculaste anteriormente. Justifica o modo como efectuaste cada cálculo.

8 x 8 =

4 x 32 =

8 x 16 =

4 x 16 =

2 x 64 =

	Porque

Tarefa 5 – Relacionar para calcular

Materiais

- Fotocópias das folhas da tarefa

Ideias disponíveis e em desenvolvimento

- Compreender, construir e memorizar as tabuadas do 2, 5, 10, 4 e 8
- Multiplicar usando a representação horizontal e recorrendo a estratégias de cálculo mental e escrito
- Usar diferentes representações para o mesmo produto

Ideias e procedimentos a desenvolver

- Utilizar estratégias de cálculo mental e escrito, neste caso, para a operação multiplicação usando as suas propriedades

Sugestões para exploração

O objectivo desta tarefa é desenvolver estratégias de cálculo mental relacionadas com propriedades da multiplicação. Parte-se do princípio que os alunos estão habituados a realizar cadeias numéricas regularmente na sala de aula, tal como é preconizado desde o 1.º ano[9], ou seja, efectuam os cálculos mentalmente, explicitando as relações que estabelecem com cálculos realizados anteriormente na mesma cadeia. Neste tipo de trabalho o(a) professor(a) pensou, previamente, numa sequência de cálculos a efectuar, encadeados entre si e que vai apresentando aos alunos, um a um.

Cada um dos grupos de cálculos deve ser proposto em dias diferentes e deve ocupar cerca de 40 minutos, incluindo a apresentação por parte dos alunos de duas hipóteses de sequenciação diferentes.

A tarefa proposta *Relacionar para calcular*, pressupõe uma exploração na sala de aula diferente do *Calcular em cadeia*, uma vez que se apresentam, de uma vez só, todos os cálculos a efectuar inseridos nas diferentes "nuvens". Cada aluno deve observá-los

[9] Ver Brocardo, J., Delgado, C. & Mendes, F. (2010). *Números e operações. 1.º Ano*. Ministério da Educação: DGIDC e a tarefa 4 da sequência 3 desta brochura.

atentamente e escolhe um deles, que saiba calcular facilmente ou que tenha já automatizado. Coloca-o na tabela de registo incluída na folha da tarefa e explica na linha à frente como pensou para saber o resultado. Essa explicação, no primeiro caso, pode ser apenas do tipo – *Porque sei* ou *Porque sei a tabuada*.

Em seguida, nas nuvens assinala com um traço por cima o cálculo efectuado, observa novamente os restantes e selecciona uma outra expressão, de modo que consiga calcular o seu valor relacionando-a com a calculada anteriormente. A ideia é, ao mesmo tempo que seleccionam cada expressão, ir justificando as relações numéricas que vão estabelecendo para calcular os vários produtos. Após este trabalho individual o(a) professor(a) deve propor a alguns dos alunos que apresentem, justificando, a sequência de cálculos que construíram. É importante que escolha dois alunos que partiram da mesma expressão mas que tenham pensado num encadeamento diferente.

As estratégias que podem ser usadas pelos alunos decorrem do conhecimento que estes já têm sobre os números, as relações entre eles e as propriedades das operações, neste caso da multiplicação. Perante a identificação e justificação de modos de pensar diferentes, o(a) professor(a) deve realçar os mais potentes e as que decorrem dos cálculos anteriores.

Noutros dias o(a) professor(a) pode retomar um trabalho do mesmo tipo com conjuntos de expressões numéricas que têm subjacente o desenvolvimento de outras estratégias associadas a propriedades da multiplicação, propondo por exemplo:

$5 \times 6 =$	$4 \times 6 =$	$2 \times 24 =$	$10 \times 5 =$
$30 \times 6 =$	$4 \times 12 =$	$4 \times 24 =$	$12 \times 5 =$
$35 \times 6 =$	$8 \times 12 =$	$2 \times 48 =$	$19 \times 5 =$
$2 \times 7 =$	$8 \times 6 =$	$8 \times 12 =$	$22 \times 5 =$
$40 \times 7 =$	$16 \times 6 =$	$16 \times 6 =$	$29 \times 5 =$
$42 \times 7 =$		$32 \times 3 =$	

Possíveis caminhos a seguir pelos alunos

Vejamos o exemplo do primeiro conjunto de cálculos cujas estratégias subjacentes estão relacionadas com o estabelecimento de relações de dobro e de dobros e metades. Apresentamos duas hipóteses possíveis de sequenciar os cálculos para o primeiro conjunto proposto e as respectivas justificações. Referimos também as propriedades e relações multiplicativas subjacentes às estratégias usadas.

Hipótese 1

Cálculos	Possíveis respostas dos alunos	Propriedades/relações envolvidas
$4 \times 6 = 24$	Porque sei a tabuada	
$4 \times 12 = 48$	Porque 12 é o dobro de 6 e por isso o resultado é o dobro de 24	Se numa multiplicação um factor duplica o produto também duplica.
$8 \times 12 = 96$	Porque 8 é o dobro de 4 e por isso o resultado é o dobro de 48	Se numa multiplicação um factor duplica o produto também duplica.
$8 \times 6 = 48$	Porque 8 é o dobro de 4 e 6 é metade de 12, por isso 8×6 dá o mesmo que 4×12	Se numa multiplicação um factor duplica e outro passa para metade o produto fica igual. Esta relação tem subjacente o uso da propriedade associativa da multiplicação: $8 \times 6 = (4 \times 2) \times 6 = 4 \times (2 \times 6) = 4 \times 12$
$16 \times 6 = 96$	Porque 16×6 é o dobro de 8×6	Se numa multiplicação um factor duplica o produto também duplica.

Hipótese 2

	Possíveis respostas dos alunos	Propriedades/relações envolvidas
$4 \times 6 = 24$	Porque sei a tabuada	
$8 \times 6 = 48$	Porque sei a tabuada	
$8 \times 12 = 96$	Porque 12 é o dobro de 6 e por isso o resultado é o dobro de 48	Se numa multiplicação um factor duplica o produto também duplica.
$4 \times 12 = 48$	Dá o mesmo que 8×6, porque 4 é metade de 8 e 12 é o dobro de 6	Se numa multiplicação um factor duplica e outro passa para metade o produto fica igual.
$16 \times 6 = 96$	Dá o mesmo que 8×12, porque 16 é o dobro de 8 e 6 é metade de 12	Se numa multiplicação um factor duplica e outro passa para metade o produto fica igual. Esta relação tem subjacente o uso da propriedade associativa da multiplicação: $16 \times 6 = (8 \times 2) \times 6 = 8 \times (2 \times 6) = 8 \times 12$

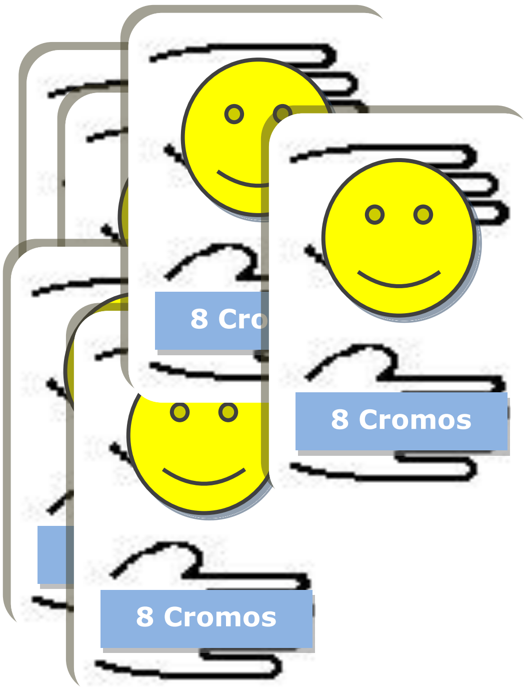
SEQUÊNCIA 3
-
MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO

Sequência 3				
Tópicos	**Objectivos específicos**	**Notas**	**Tarefas**	**Organização temporal**
Multiplicação e Divisão	– Resolver problemas que envolvam o raciocínio proporcional[10]. – Investigar regularidades numéricas[11]. – Resolver problemas envolvendo dinheiro[12].	– Usar tabelas na resolução de problemas que envolvam raciocínio proporcional[13]. – Usar estratégias de cálculo mental recorrendo à propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e subtracção e à propriedade comutativa.	**Comprar carteiras de cromos**	Tarefa para ser explorada durante cerca de 90 minutos
	– Utilizar estratégias de cálculo mental e escrito para a operação multiplicação usando as suas propriedades. – Compreender e realizar algoritmos para a operação multiplicação. – Resolver problemas que envolvam a multiplicação em contextos diversos.	– Usar estratégias de cálculo mental recorrendo à propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e subtracção e à propriedade comutativa. – Promover a aprendizagem gradual dos algoritmos, integrando o trabalho realizado nos dois primeiros anos. – Começar por usar representações mais detalhadas dos algoritmos.	**Calcular de maneiras diferentes**	Tarefa para ser explorada durante cerca de 90 minutos: 1.ª Parte – 20 minutos 2.ª Parte – 20 minutos 3.ª Parte – 50 minutos
	– Resolver problemas tirando partido da relação entre a multiplicação e a divisão. – Compreender a divisão nos sentidos de medida e partilha.		**Cromos e mais cromos…**	Tarefa para ser explorada durante cerca de 90 minutos.
	– Utilizar estratégias de cálculo mental e escrito para a operação divisão tirando partido da multiplicação e suas propriedades. – Compreender os efeitos das operações sobre os números.		**Calcular em cadeia**	Cada cadeia numérica deve ser realizada durante cerca de 15 minutos. A tarefa deve ser retomada em diferentes dias.

[10] Este objectivo, no Programa de Matemática do Ensino Básico, está associado ao tópico Regularidades.
[11] Este objectivo, no Programa de Matemática do Ensino Básico, está associado ao tópico Regularidades.
[12] Este objectivo, no Programa de Matemática do Ensino Básico, é do tema Geometria e medida, no tópico Dinheiro.
[13] Esta nota está associada, no Programa de Matemática do Ensino Básico, ao tópico Regularidades.

Comprar carteiras de cromos

Papelaria do Sr. António



Número de carteiras de cromos	Preço (Euros)
2	3
10	
20	
30	
80	
100	
120	
200	

Escola da Raquel

Ano de escolaridade	Alunos
1.º	60
2.º	100
3.º	110
4.º	90

Tarefa 1 – Comprar carteiras de cromos

Materiais

- Fotocópia da folha da tarefa

Ideias disponíveis e em desenvolvimento

- Resolver problemas que envolvam a multiplicação em contextos diversos
- Utilizar estratégias de cálculo mental e escrito para a operação multiplicação usando as suas propriedades

Ideias e procedimentos a desenvolver

- Resolver problemas que envolvam o raciocínio proporcional[14]
- Investigar regularidades numéricas[15]
- Resolver problemas envolvendo dinheiro[16]

Sugestões para exploração

Esta tarefa tem como propósito explorar algumas regularidades dos números organizados em tabelas, relacionando aspectos da multiplicação com o raciocínio proporcional. A ideia é desafiar os alunos a observarem atentamente as imagens da folha do aluno e formularem problemas a partir destas. Podem surgir formulações associadas simplesmente ao preenchimento da tabela ou serem propostas situações, mais elaboradas, que envolvam a compra de carteiras de cromos para serem oferecidas no final do ano aos alunos da escola da Raquel.

Os problemas que surgem estão associados a situações verídicas de ofertas feitas aos alunos das escolas por entidades tais como Juntas de Freguesia, Câmaras Municipais, etc. É fundamental que o preenchimento da tabela seja uma das primeiras sugestões, quaisquer que sejam os problemas inventados. De facto, a ideia inicial é preencher a tabela dos preços das carteiras de cromos estabelecendo relações de tipo proporcional entre os números envolvidos.

[14] Este objectivo, no Programa de Matemática do Ensino Básico, está associado ao tópico Regularidades.
[15] Este objectivo, no Programa de Matemática do Ensino Básico, está associado ao tópico Regularidades.
[16] Este objectivo é do tema Geometria e medida, no tópico Dinheiro.

Considerando que, na tabela depois de completa, estão identificados os preços de diferentes quantidades de carteiras de cromos, surgem questões do tipo:

- *O Presidente da Junta quer oferecer uma carteira de cromos a cada um dos alunos do 1.º ano da escola da Raquel. Que dinheiro gastará?*
- *O Presidente da Junta quer oferecer uma carteira de cromos a cada um dos alunos do 1.º e 2.º anos da escola da Raquel. Que dinheiro gastará?*
- *O Presidente da Junta quer oferecer uma carteira de cromos a cada um dos alunos da escola da Raquel. Que dinheiro gastará?*

Tanto no preenchimento da tabela como nas respostas a questões semelhantes às dos exemplos o objectivo é que os alunos interpretem a tabela e identifiquem algumas relações entre os números utilizados. Assim, nas respostas a todas as perguntas do tipo das anteriores, excepto no caso em que o total dos alunos é 100, estes têm de fazer diferentes composições associadas ao número de alunos pretendido e fazer a sua correspondência com os respectivos preços. Por exemplo, para saberem quanto se gastará se for oferecida uma carteira de cromos a todos os 110 alunos do 3.º ano podem adicionar o preço de 10 carteiras (na tabela) com o preço de 100 carteiras (na tabela).

Após uma exploração em grupo-turma das questões formuladas pelos alunos, o(a) professor(a) deve seleccionar algumas do tipo das exemplificadas, de modo que os alunos possam estabelecer as relações pretendidas. A resposta a estas questões deve ser realizada em grupos de 2 ou 3 alunos e, posteriormente, feita a discussão das diferentes estratégias usadas, novamente com toda a turma. O objectivo desta discussão final é a apresentação e comparação dos diferentes processos utilizados, evidenciando estratégias mais potentes.

Possíveis caminhos a seguir pelos alunos

Depois de formuladas questões às quais os alunos tentam dar resposta, vários caminhos podem surgir. No preenchimento da tabela as relações que são estabelecidas dependem da ordem pela qual o cálculo é efectuado.

Por exemplo, um grupo de alunos pode optar por preencher primeiro a linha do 20 e do 200, evidenciando assim o uso da multiplicação por 10 e por 100. No caso de preencherem o preço de 10 carteiras depois de saberem o preço de 20, basta estabelecerem uma relação de metade. O mesmo acontece se preencherem o preço de 100 carteiras depois de saberem o preço de 200. Para calcularem o preço de 30 podem fazê-lo a partir da adição dos preços de 10 e de 20 carteiras. Um procedimento semelhante pode ser utilizado para saber o preço de 120 carteiras. Finalmente, para preencher o preço de 80 carteiras podem seguir-se dois tipos de estratégias, umas multiplicativas, partir do preço de 20 e multiplicar por 4 ou partir do preço de 10 e multiplicar por 8, ou ainda partir do preço de 100 e retirar o preço de 20 carteiras.

No caso de os alunos optarem por preencher a tabela sequencialmente, o preço de 10 carteiras surge como o quíntuplo do preço de 2 e, a partir daí toda a tabela pode ser completada recorrendo a estratégias multiplicativas e/ou aditivas, do tipo das descritas anteriormente.

Pode haver alunos que calculem, inicialmente, o preço unitário de uma carteira de cromos e, a partir daí todos os preços podem ser determinados usando estratégias multiplicativas. É importante realçar que, esta opção implica o cálculo multiplicativo em que um dos factores é um número racional não inteiro, na sua representação decimal (1,5 €). No entanto, considerando que na altura em que esta tarefa pode ser proposta aos alunos, eles já devem conhecer este tipo de números e que 1,5 é um número de referência com o qual os alunos estão familiarizados (no contexto do dinheiro e pensando em um euro e meio), pode ser uma boa ocasião para discutir também as relações que decorrem da sua utilização. Assim, surgem os seguintes cálculos 10×1,5; 20×1,5; 30×1,5 … 100×1,5 e 200×1,5 que também podem ser relacionados entre si, a partir de relações multiplicativas importantes (dobros, múltiplos de 10 e de 100) e de decomposições dos números envolvidos recorrendo à propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição ($30\times 1{,}5 = 10\times 1{,}5 + 20\times 1{,}5$ logo $30\times 1{,}5 = 15 + 30 = 45$).

Depois da tabela preenchida, a segunda parte da tarefa corresponde às respostas para as questões formuladas. Tendo em conta, por exemplo, as questões apresentadas no ponto anterior, os alunos podem recorrer a procedimentos diversos.

Na primeira questão, o preço de 60 carteiras de cromos pode ser calculado adicionando (o preço de 30+30 carteiras) ou multiplicando (o dobro do preço de 30 carteiras).

Na resposta à segunda questão os alunos podem partir do total de alunos de 1º e 2º ano e calcular o preço de $160\ (60+100)$ carteiras de cromos, usando diversos procedimentos. Por exemplo, adicionando o preço de 60 com o preço de 100 carteiras, ou multiplicando (usando o dobro do preço de 80 carteiras ou 16 vezes o preço de 10 carteiras). Podem surgir outras estratégias, de tipo aditivo ou subtractivo, mais demoradas, uma vez que podem envolver procedimentos mais repetitivos e menos eficazes. Estes procedimentos baseados em estratégias aditivas ou subtractivas são semelhantes aos ilustrados inicialmente a propósito do preenchimento da tabela de preços.

No caso da resolução do problema associado ao preço do total de carteiras de cromos para todos os alunos, uma vez que estes são 360, também há várias maneiras de efectuar os cálculos. No entanto, devem ser privilegiadas as estratégias multiplicativas, por exemplo, identificando que 360 é o triplo de 120 e o preço de 120 carteiras pode ser identificado na tabela. Há também outras estratégias que recorrem simultaneamente a cálculo multiplicativo e aditivo, decompor 360 em $3\times100+60$ ou em $200+2\times80$ e fazer os cálculos correspondentes aos preços associados. Tal como nos problemas anteriores podem ser usadas estratégias apenas aditivas mas que são mais demoradas, menos eficientes e que têm maior probabilidade de enganos.

Os alunos que calculam inicialmente o preço unitário de cada carteira de cromos podem sempre multiplicar o respectivo número de carteiras de cromos em cada um dos problemas por 1,5 €. Nas multiplicações associadas não é necessário usar o algoritmo, uma vez que há outros processos mais flexíveis que recorrem ao uso das propriedades da multiplicação. Por exemplo, para efectuar 160×1,5 os alunos podem utilizar:

- *a decomposição do 160 em 100+60,*

  $160\times1,5=100\times1,5+60\times1,5$ *ou seja*
  $160\times1,5=150+6\times10\times1,5$ *ou seja*
  $160\times1,5=150+6\times15=150+90=240$

- *a decomposição do 160 em 2×80,*

  $160\times1,5=2\times80\times1,5$

  (neste caso, identificam na tabela o preço de 80 carteiras e duplicam)

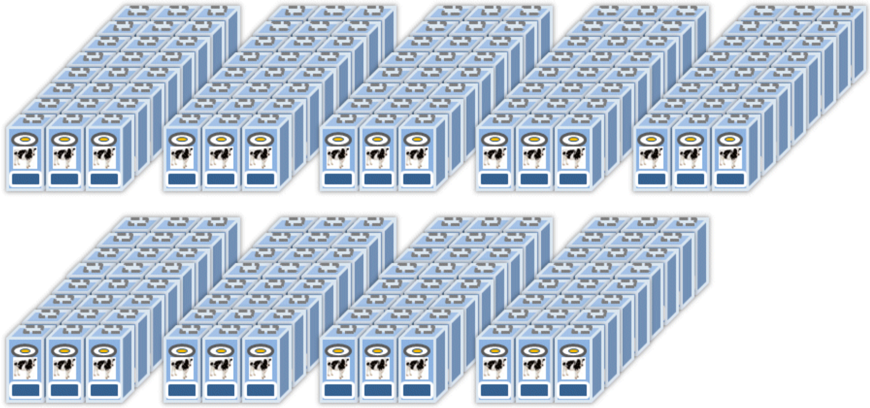
- *a decomposição do 1,5 em 1+0,5,*

  $160\times1,5=160\times(1+0,5)$ *ou seja*

  $160\times1,5=160+160\times0,5=160+80=240.$

Calcular de maneiras diferentes

1. O Duarte, o João e a Raquel resolveram contar os pacotes de leite escolar que sobraram, no último dia de aulas antes das férias da Páscoa. Na arrecadação da escola contaram 9 paletes, cada uma com 24 pacotes de leite.



E agora como vamos fazer para calcular o número de pacotes de leite? – Pergunta o João.

Tenho uma ideia! Cada um vai calcular como quer e depois vemos se encontramos o mesmo número! – Propõe o Duarte.

Está bem! – Diz o João e a Raquel, ao mesmo tempo.

O cálculo do Duarte

$9 \times 24 = 10 \times 24 - 1 \times 24 = 240 - 24$

$240 - 24 = 216$

$9 \times 24 = 216$

O cálculo da Raquel

$$9 \times 24 = \underbrace{9 \times 20}_{180} + \underbrace{9 \times 4}_{36} = 216$$

$$\underbrace{180 \quad 36}_{216}$$

$9 \times 24 = 216$

O cálculo do João

24	(20+4)
X9	
180	9x20
+36	9x4
216	

9x24=216

* *Compreendes como calcularam o Duarte, a Raquel e o João? Compara as diferentes formas de calcular.*

Calcular de maneiras diferentes

2. Na escola da Ana também sobraram pacotes de leite, quando começaram as férias da Páscoa. Foram contadas 7 paletes de 24 pacotes.

   Calcula o número de pacotes de leite que sobraram usando a forma de cálculo da Raquel e do João. Compara-as entre si.

Calcular como a Raquel

Calcular como o João

Calcular de maneiras diferentes

3. Para cada um dos problemas seguintes escolhe uma forma de cálculo e resolve-os.

O Nuno quer ir com 5 amigos ver um jogo de futebol da Selecção Nacional. Os bilhetes mais baratos custam 21 € e os mais caros custam 75 €. Se comprarem os bilhetes mais baratos quanto gastam? E se optarem pelos mais caros?

A Mariana faz colecção de baralhos de cartas para jogar com temas diferentes. Já tem 12 conjuntos, cada um com 25 cartas. No total, quantas cartas tem?

O Miguel vai a um concerto numa grande sala de espectáculos. Quando comprou o bilhete percebeu que a sala está organizada em 7 zonas diferentes. Cada zona tem 237 lugares sentados. Quantos lugares tem a sala de espectáculos?

Tarefa 2 – Calcular de maneiras diferentes

Materiais

- Fotocópia das folhas da tarefa

Ideias disponíveis e em desenvolvimento

- Multiplicar utilizando a representação horizontal e recorrendo a estratégias de cálculo mental e escrito
- Compreender os efeitos das operações sobre os números

Ideias e procedimentos a desenvolver

- Utilizar estratégias de cálculo mental e escrito para a operação multiplicação usando as suas propriedades
- Compreender e realizar algoritmos para a operação multiplicação
- Resolver problemas que envolvam a multiplicação em contextos diversos

Sugestões para exploração

Esta tarefa está organizada em três partes diferentes, correspondentes a cada folha da tarefa e que devem ser exploradas separadamente. A primeira e segunda parte da tarefa devem ocupar cerca de 20 minutos, cada uma e, a terceira parte ocupa cerca de 50 minutos, incluindo a exploração com toda a turma.

A primeira parte tem como propósito que os alunos observem atentamente as três formas de cálculo usadas pelo Duarte, Raquel e João e que estabeleçam conexões entre elas. Assim, depois da observação individual da primeira folha da tarefa, o(a) professor(a) deve organizar a discussão com toda a turma, de modo que os alunos descrevam as várias formas de cálculo, identificando semelhanças e diferenças entre elas. Um dos objectivos desta discussão é estabelecer relações entre as resoluções da Raquel e do João e caminhar gradualmente no sentido da introdução do algoritmo da multiplicação.

A resolução do Duarte é claramente uma resolução baseada no cálculo mental. De facto, Duarte primeiro teve de "olhar para os números" para pensar no que podia fazer a partir deles. Apenas porque um dos factores é o 9, utilizou a estratégia de fazer um cálculo mais "redondo" recorrendo ao 10 e depois compensando. Esta maneira de calcular, de modo flexível e eficaz, de acordo com os números envolvidos, revela o seu sentido de número. Como pano de fundo está o conhecimento sobre a multiplicação e a propriedade distributiva da multiplicação em relação à subtracção.

Raquel também usa a propriedade distributiva da multiplicação, mas em relação à adição. Revela um conhecimento sobre o sistema de numeração e a decomposição decimal, transformando o 24 em 20+4 e calculando os produtos parciais.

João utiliza um procedimento muito semelhante ao de Raquel mas em vez de fazer o cálculo horizontal faz o cálculo na vertical. Observando os seus registos, também decompõe o 24 em 20+4 e calcula os produtos parciais, embora represente todos os cálculos na vertical, com uma determinada organização. O procedimento usado por João não é um algoritmo, uma vez que ele trabalha com os números e não com dígitos, usando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. No entanto, é um procedimento ordenado com números, com determinadas regras, que permite evoluir progressivamente para o cálculo algorítmico, com a compreensão necessária sobre o que se faz e porque se faz.

É importante na sala de aula treinar o cálculo algorítmico, que tem características particulares a nível da Matemática e faz parte de uma tradição portuguesa. No entanto, é fundamental que este treino se faça depois de os alunos terem um domínio bastante grande sobre a operação multiplicação e as suas propriedades, de modo a efectuarem cálculos com compreensão e de modo flexível. Esta compreensão ajudá-los-á também na compreensão do algoritmo tradicional, tal como habitualmente se representa.

Na segunda parte da tarefa, correspondente à segunda folha da tarefa, propõe-se explicitamente que os alunos resolvam o problema de duas maneiras. Inicialmente, fazendo um registo horizontal, calculando o produto decompondo o multiplicando e usando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. A seguir, ao calcular como o João, o procedimento matemático é o mesmo mas o registo dos cálculos é efectuado na vertical, obedecendo a uma determinada organização. Deste modo, espera-se que os alunos estabeleçam o paralelismo entre as duas formas de calcular, caminhando no sentido do algoritmo tradicional.

Na terceira parte da tarefa, correspondente à terceira folha, os alunos são convidados a resolver os diferentes problemas, usando uma forma de cálculo que considerem adequada. No final da resolução dos três problemas são discutidas e analisadas, com toda a turma, as várias estratégias usadas pelos alunos, relacionando-as com os números envolvidos e a facilidade e rapidez da sua utilização.

Possíveis caminhos a seguir pelos alunos

Na terceira parte da tarefa os alunos podem seguir vários caminhos. São ilustrados alguns deles.

No primeiro problema é necessário calcular 6×21 e 6×75. Para calcular 6×21 é mais rápido usar o cálculo mental, não se justificando o uso do registo vertical próximo do algoritmo.

- *Cálculo horizontal usando a decomposição decimal e a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição*

  $6\times21=6\times20+6\times1$; $6\times21=120+6=126$

O mesmo acontece no caso 6×75, não se justificando o uso do registo vertical próximo do algoritmo. No entanto pode haver alunos a calcular desse modo.

- *Cálculo horizontal usando a decomposição decimal e a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição*

  $6\times75=6\times70+6\times5$; $6\times75=420+30=450$

- *Cálculo horizontal recorrendo ao uso dos dobros e das metades*

  $6\times75=3\times150$; $3\times150=2\times150+150$; $3\times150=300+150=450$
  logo $6\times75=450$

- *Cálculo vertical próximo do algoritmo usando a decomposição decimal e a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição*

$$\begin{array}{rl} 75 & (70+5) \\ \times\ 6 & \\ \hline 420 & (6\times70) \\ +30 & (6\times5) \\ \hline 450 & \end{array}$$

No segundo problema os números, sendo de referência, sugerem o uso de um cálculo mental flexível e adequado a eles. Pode haver alunos que recorram ao registo vertical mas neste caso é importante incentivá-los a "olhar para os números" antes de decidir como vão calcular.

- *Cálculo horizontal usando as metades e os dobros*

  $12\times25=6\times50=300$

No terceiro problema, "olhando para os números" não se identifica nenhuma sua característica que permita calcular de modo flexível. Logo podem usar-se procedimentos que funcionam sempre, quaisquer que sejam os números – uso da decomposição decimal e da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

- *Cálculo horizontal usando a decomposição decimal e a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição*

  $7 \times 237 = 7 \times 200 + 7 \times 30 + 7 \times 7$; $7 \times 237 = 1400 + 210 + 49 = 1659$

- *Cálculo vertical próximo do algoritmo usando a decomposição decimal e a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição*

$$
\begin{array}{rl}
237 & (200+30+7) \\
\times\ 7 & \\
\hline
1400 & (7\times 200) \\
210 & (7\times 30) \\
49 & (7\times 7) \\
\hline
1659 &
\end{array}
$$

Cromos e mais cromos …

Tarefa 3 – Cromos e mais cromos ...

Materiais

- Fotocópia da folha da tarefa

Ideias disponíveis e em desenvolvimento

- Multiplicar usando a representação horizontal e recorrendo a estratégias de cálculo mental e escrito
- Resolver problemas que envolvam a multiplicação em contextos diversos
- Utilizar estratégias de cálculo mental e escrito para a operação multiplicação usando as suas propriedades

Ideias e procedimentos a desenvolver

- Resolver problemas tirando partido da relação entre a multiplicação e a divisão
- Compreender a divisão nos sentidos de medida e de partilha

Sugestões para exploração

Esta tarefa tem como propósito explorar contextos de divisão, de modo a facilitar o entendimento dos alunos sobre esta operação. Neste sentido, a tarefa deve ser realizada com os alunos antes de estes conhecerem o algoritmo da divisão, considerando que se pretende a compreensão da operação divisão e das relações entre esta e as outras operações. Apesar de, desde o primeiro ano, os alunos resolverem problemas cujo contexto é de divisão usando as estratégias adequadas ao conhecimento que têm sobre os números e as operações, no terceiro ano é importante que seja identificada, explicitamente, a relação que existe entre a multiplicação e a divisão.

Uma vez que a divisão é a operação inversa da multiplicação[17], é fundamental apresentar aos alunos situações que relacionem estas operações. A partir do momento em que os alunos já resolveram bastantes problemas de multiplicação em contextos diversificados, é essencial que lhes sejam propostos também contextos de divisão.

[17] Note-se que a divisão é a operação inversa da multiplicação, em universos numéricos adequados, neste caso, no conjunto dos números inteiros positivos excepto o zero.

No início, na resolução de problemas de divisão, os alunos usam estratégias ligadas ao contexto do problema e relacionadas com as outras operações, tais como a adição e a subtracção. No entanto, é necessário que compreendam que as estratégias relacionadas com a multiplicação são mais potentes e eficazes e, deste modo, identificam, gradualmente, a estreita relação entre estas duas operações. Para que esta compreensão seja desenvolvida é fundamental, na sala de aula, que o(a) professor(a) organize momentos de interacção com todos os alunos, em que estes explicitem as estratégias utilizadas e estas sejam comparadas com as de outros colegas, reconhecendo as suas semelhanças e diferenças.

A tarefa *Cromos e mais cromos…* parte de duas imagens que incluem situações de divisão diferentes. A primeira apela ao sentido de divisão por medida e, a partir dela, pode ser formulado um problema do tipo:

- *Uma criança interroga-se sobre quantas carteiras, com 8 cromos cada, são necessárias comprar (ou ter) para possuir uma colecção com um total de 176 cromos.*

Nesta situação os alunos sabem a medida do grupo (8 cromos), que corresponde ao número de cromos que tem cada carteira, e necessitam de saber quantos grupos (carteiras) de 8 cromos podem fazer com um total de 176.

A segunda imagem apela ao sentido de divisão por partilha. Um exemplo de uma formulação de um problema é o seguinte:

- *Pensando num total de 144 cromos, os alunos interrogam-se sobre com quantos cromos fica cada uma das crianças da imagem, se os partilharem igualmente.*

Nesta situação os alunos têm um total de 144 cromos para repartir por 6 grupos (crianças) e necessitam de procurar com quantos elementos (cromos) fica cada grupo (criança).

A ideia é propor aos alunos que observem com atenção as imagens, uma de cada vez, e desafiá-los a formular um problema adequado. Os problemas formulados podem ser diferentes em termos da história inventada pelos alunos mas, em termos da situação de divisão, serão semelhantes aos exemplos apresentados. A história associada pode ser inventada e discutida por todos. O(A) professor(a) deve orientar os alunos no sentido de ser construída uma única história que contextualiza o problema que é resolvido por todos. Este deve ser realizado em grupos de 2 ou 3 alunos e após a sua resolução deve ser discutido em conjunto de modo a serem explicitadas as diferentes estratégias, serem comparadas e estabelecidas relações entre elas.

A história e o problema relacionados com a segunda imagem devem ser construídos após a discussão resultante da resolução do primeiro problema. Deste modo, alguns alunos podem evoluir no uso de estratégias de resolução, depois de terem compreendido as estratégias dos colegas e de as terem comparado com as suas.

Na discussão com toda a turma das estratégias usadas pelos alunos é importante a sua apresentação da mais informal, mais demorada e susceptível de enganos, para a mais rápida e eficaz. Neste caso, o(a) professor(a) deve identificar, durante a fase de resolução a pares, alguns grupos de alunos que usaram estratégias diferentes e propor-lhes que as apresentem aos colegas, pela ordem sugerida.

É natural que os alunos que recorrem a procedimentos subtractivos se enganem a fazer alguma das subtracções, porque envolvem decomposições do aditivo. Mesmo aqueles que optam por adicionar sucessivamente, considerando o número de adições envolvidas, têm muitas probabilidades de cometer algumas incorrecções. Os aspectos relacionados com processos morosos e susceptíveis de engano podem ser evidenciados pelos alunos durante a discussão das resoluções dos problemas e, no caso de não o serem, o(a) professor(a) deve realçá-los.

Há ainda alunos que, em situações de divisão, regridem no uso de estratégias, em comparação com as que já utilizam nos problemas de multiplicação. Este facto está relacionado com a compreensão da própria operação divisão. No sentido de melhorar essa compreensão deve ser evidenciada a relação divisão/multiplicação, de modo que os alunos associem uma operação a outra, fazendo afirmações onde se relaciona a divisão com factos conhecidos da multiplicação:

- *16 cromos são 2 carteiras de 8, ou seja, 16:8=2 porque 2×8=16*
- *80 cromos são 10 carteiras de 8, ou seja, 80:8=10 porque 10×8=80*
- *18 cromos repartidos igualmente por 6 crianças, dá 3 cromos a cada uma, ou seja, 18:6=3 porque 3×6=18*
- *60 cromos repartidos igualmente por 6 crianças, dá 10 cromos a cada uma, ou seja, 60:6=10 porque 10×6=60.*

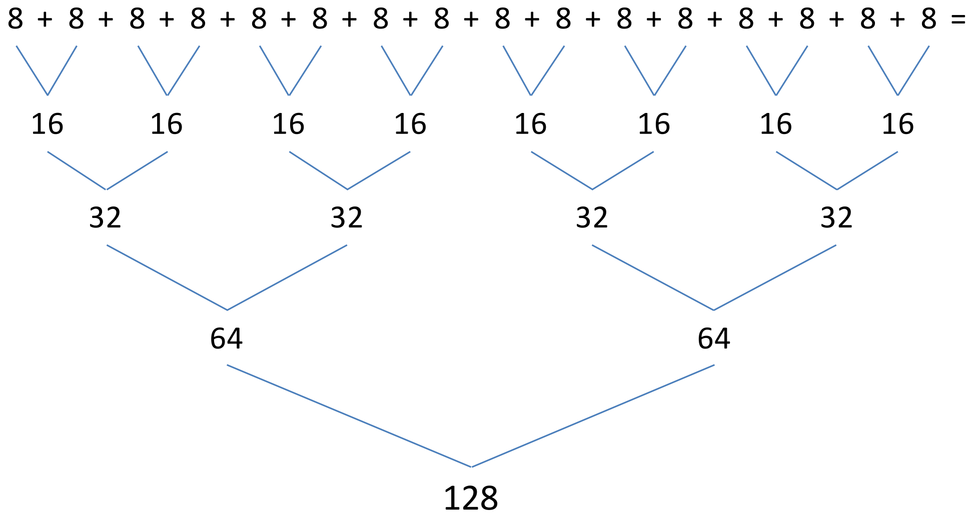
Possíveis caminhos a seguir pelos alunos

Na resolução desta tarefa os alunos podem utilizar diferentes estratégias associadas às operações adição, subtracção ou multiplicação. As situações podem ser representadas através de simbologia relacionada com a divisão, escrevendo por exemplo 176:8 e 144:6 mas o algoritmo tradicional da divisão não é uma estratégia disponível nesta altura, uma vez que os alunos não o conhecem.

Apresentam-se detalhadamente alguns caminhos possíveis a seguir pelos alunos na resolução do primeiro problema da tarefa. Os procedimentos relacionados com as diferentes estratégias podem ser bastante variados. Se os alunos recorrerem a estratégias aditivas podem por exemplo usar procedimentos do tipo:

- *Adicionam repetidamente 8 até perfazerem 176. Estas adições podem ser feitas sucessivamente: 8+8=16; 16+8=24; 24+8=32; … até 168+8=176*

- *Adicionam partindo do 8+8=16; 16+16=32; 32+32=64 usando sempre adições de dobros até alcançarem o 176. Usando este procedimento os alunos têm de arranjar uma maneira funcional de contar quantos grupos de 8 conseguem fazer. Uma maneira usual é fazer por partes até se aproximarem do 176, por exemplo, fazendo até 128, usando dobros de dobros, de modo a adicionarem mais rapidamente e depois adicionarem mais cautelosamente até perfazerem 176 cromos. O número de carteiras é identificado através da contagem dos grupos de 8 utilizados.*



128 (16 carteiras) +32 (4 carteiras) =160
160 cromos (20 carteiras) +16 cromos (2 carteiras) são 176 cromos embalados em 22 carteiras de cromos. Logo é preciso comprar 22 carteiras para ter um total de 176 cromos.

Os alunos podem também recorrer a estratégias subtractivas, fazendo subtracções sucessivas a partir do número total de cromos:

- *176-8=168; 168-8=160; 160-8= 152; …; até 8-8=0 e contando depois quantas vezes subtraíram o 8, o que corresponde ao número de carteiras de 8 cromos que é preciso comprar para ter 176 cromos.*

Outros alunos podem usar estratégias mistas, recorrendo à adição ou subtracção em conjunto com a multiplicação, não partindo do número de cromos de uma carteira mas de várias. Por exemplo, podem pensar:

- *se uma carteira tem 8 cromos, 10 carteiras têm 80 cromos e 80+80 são 160 cromos ou seja, 20 carteiras. Depois adicionam uma a uma 160+8=168 e 168+8=176. A solução é construída a partir de 10+10+1+1=22 carteiras.*

- *$176-80=96$; $96-80=16$; $16-8=8$; $8-8=0$. A solução é construída retirando sucessivamente quantidades de cromos cujo número de carteiras associado é fácil de usar, como, por exemplo, o 80 que é 10×8 e contando depois as carteiras de cromos retiradas ao total $10+10+1+1=22$ carteiras.*

As estratégias mais rápidas e eficazes surgem ligadas à multiplicação e ao conhecimento de alguns factos associados a múltiplos de 10 e à utilização da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. Por exemplo:

- *Uma carteira tem 8 cromos*
  - *10 carteiras têm 80 cromos porque $10\times8=80$*
  - *20 carteiras têm 160 cromos porque $20\times8=2\times10\times8=160$*
  - *2 carteiras têm 16 cromos*
  - *$176=20\times8+2\times8$ ou $176=22\times8$ então são necessárias 22 carteiras para ter 176 cromos.*
- *Uma carteira tem 8 cromos, então preciso de usar a tabuada do 8*
  - *$10\times8=80$*
  - *$20\times8=2\times(10\times8)=2\times80=160$*
  - *$21\times8=160+8=168$*
  - *$22\times8=168+8=176$, então são necessárias 22 carteiras para ter 176 cromos.*

No que diz respeito ao segundo problema da tarefa, repartir 144 cromos por 6 crianças, os procedimentos possíveis de usar pelos alunos são semelhantes aos já ilustrados. No entanto, considerando o sentido da divisão envolvido, sentido de partilha, as estratégias associadas a este contexto que podem surgir, mais naturalmente, são as que recorrem à operação inversa, ou seja, à multiplicação. Neste caso os alunos fazem tentativas de, através da multiplicação, se aproximarem o mais possível do número que corresponde ao dividendo. Assim, surgem estratégias semelhantes às duas últimas ilustradas mas, em vez de usarem múltiplos de 8, usam múltiplos de 6, uma vez que se trata de calcular $144:6$.

Calcular em cadeia

$20 \times 5 =$	$24 : 4 =$	$100 : 10 =$
$100 : 5 =$	$48 : 4 =$	$100 : 20 =$
$100 : 20 =$	$48 : 8 =$	$200 : 20 =$
$25 \times 10 =$	$96 : 16 =$	$200 : 40 =$
$250 : 10 =$	$96 : 8 =$	$400 : 20 =$
$250 : 25 =$		

$64 : 8 =$	$24 : 2 =$	$2 \times 10 =$
$64 : 4 =$	$24 \times 0,5 =$	$10 : 0,5 =$
$64 : 16 =$	$36 : 2 =$	$2 \times 25 =$
$128 : 16 =$	$36 \times 0,5 =$	$25 : 0,5 =$
$128 : 8 =$	$48 \times 0,5 =$	$2 \times 43 =$
	$48 : 2 =$	$43 : 0,5 =$

Tarefa 4 – Calcular em cadeia

Ideias disponíveis e em desenvolvimento

- Multiplicar usando a representação horizontal e recorrendo a estratégias de cálculo mental e escrito
- Utilizar estratégias de cálculo mental e escrito para a operação multiplicação usando as suas propriedades

Ideias e procedimentos a desenvolver

- Resolver problemas tirando partido da relação entre a multiplicação e a divisão
- Utilizar estratégias de cálculo mental para a operação divisão tirando partido da multiplicação e suas propriedades
- Compreender os efeitos das operações sobre os números

Sugestões para exploração

Esta tarefa tem como finalidade o desenvolvimento do cálculo mental associado às operações multiplicação e divisão, tirando partindo da relação entre estas duas operações, a partir da exploração de cadeias numéricas.

Tal como foi anteriormente apresentado e fundamentado[18], a exploração de cadeias numéricas deve ser feita ao longo de todo o ano, sempre que o(a) professor(a) pretenda que os seus alunos consolidem relações e propriedades numéricas das operações aritméticas.

Cada cadeia numérica[19] é constituída por um conjunto de exercícios de cálculo, sem contexto, relacionados entre si e organizados sequencialmente. O modo como os exercícios são ordenados é pensado cuidadosa e previamente pelo(a) professor(a), de maneira a realçar a utilização de uma determinada estratégia de cálculo. O desenvolvimento do cálculo mental pressupõe um trabalho sistemático, focado no

[18] Ver Brocardo, J., Delgado, C. & Mendes, F. (2010). *Números e operações. 1.º Ano*. Ministério da Educação: DGIDC.
[19] Segue-se uma opção de apresentação e exploração das cadeias numéricas inspirada nas ideias de Fosnot & Dolk (2001). Young mathematicians at work: *Constructing multiplication and division*. Portsmouth, The Netherlands: Heinemann.

estabelecimento de relações entre os números e as operações, que tem de ser feito ao longo de todo o ano.

A maneira como o(a) professor(a) trabalha na sala de aula cada cadeia, é determinante para que todas as suas potencialidades sejam exploradas com sucesso. Destacamos três elementos fundamentais: o tempo, a organização da sala e a condução da exploração da tarefa com os alunos.

Cada cadeia é uma proposta de actividade que deve ter um ritmo vivo, em que se privilegia a oralidade (e não o registo escrito no caderno) e que não deve demorar muito tempo. Pode, por exemplo, começar-se o dia de trabalho, propondo uma cadeia numérica e procurando que ela seja explorada em não mais do que 15 minutos. Diariamente, não devem ser exploradas mais do que uma ou duas cadeias (uma nos dois primeiros anos e duas no caso do 3.º e 4.º anos).

A organização da sala deve ser pensada de modo a manter os alunos "presos" ao cálculo que se está a analisar/propor. Nos casos em que na sala se usa um espaço com tapete/almofadas, a exploração das cadeias pode ser feita nele. Os alunos sentam-se próximos uns dos outros e do(a) professor(a), que vai registando as respostas dos alunos e ilustrando o modo como cada um explica o que pensou. Caso não exista este tipo de espaço na sala de aula, os alunos podem estar sentados na sua mesa de trabalho, mas focados no que o(a) professor(a) pede e escreve, não devendo registar no seu caderno o que vai sendo escrito no quadro. Podem ter uma folha ou bloco de notas para fazer registos. No entanto, devem ser registos que servem para não se "perderem" a fazer um determinado cálculo ou para conseguir recordar o que pensaram. Registos mais cuidados podem ser efectuados em casos esporádicos, em que se considera que devem ser assinalados desta forma, mas não durante a realização da cadeia. Cálculos em cadeia são um tipo de tarefa que visa o desenvolvimento do cálculo mental e que, por isso, não se deve basear no registo escrito.

Na condução da exploração da tarefa é importante que os exercícios da cadeia sejam apresentados um a um, que cada aluno pense na solução sozinho e que o(a) professor(a) registe no quadro os resultados e explicações que evidenciem como se pode pensar para os obter.

O(A) professor(a) escreve no quadro a primeira proposta de cálculo e pede aos alunos para pensarem no resultado e colocarem o dedo no ar quando souberem a resposta. Depois de decorrido algum tempo, quando já bastantes alunos têm o dedo no ar, o(a) professor(a) pede a um deles que diga a sua resposta e que explique como chegou a ela.

As cadeias apresentadas nesta tarefa focam-se na relação entre a multiplicação e a divisão. Permitem que os alunos desenvolvam estratégias de cálculo mental associadas à divisão, a partir de estratégias multiplicativas que foram exploradas previamente e que se baseiam nas propriedades desta operação. Nomeadamente, recorrem à propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e à subtracção, à propriedade comutativa e à propriedade associativa da multiplicação.

Possíveis caminhos a seguir pelos alunos

Uma vez que os alunos podem justificar, para cada cálculo, os resultados obtidos pensando de maneira diferente, apresentamos alguns exemplos de possíveis respostas para duas das cadeias numéricas propostas. Para cada uma delas, para além de possíveis respostas dos alunos, indicamos ainda as relações numéricas ou as propriedades das operações envolvidas.

Cálculos	**Possíveis respostas dos alunos**	**Propriedades/relações envolvidas**
$20\times5=100$	– Porque já sei de cor ou 20×5 é o dobro de 10×5 ou seja $20\times5=2\times10\times5=2\times50=100$	– Usar um produto conhecido (10×5) e o facto de, numa multiplicação, se um factor duplica o produto também duplica.
$100:5=20$	– Porque $20\times5=100$ ou o número que multiplicado por 5 é igual a 100 é 20.	– Tirar partido da relação inversa entre a divisão e a multiplicação.
$100:20=5$	– Porque se 20×5 é igual a 100 então 5×20 também é igual a 100 ou o número que multiplicado por 20 é igual a 100 é 5.	– Tirar partido da relação inversa entre a divisão e a multiplicação e da propriedade comutativa da multiplicação.
$25\times10=250$	– Porque sei multiplicar por 10	– Multiplicar usando os múltiplos de 10
$250:10=25$	– Porque $25\times10=250$ ou o número que multiplicado por 10 é igual a 250 é 25.	– Tirar partido da relação inversa entre a divisão e a multiplicação.
$250:25=10$	– Porque se 25×10 é 250 então também 10×25 é 250 ou o número que multiplicado por 25 é igual a 250 é 10.	– Tirar partido da relação inversa entre a divisão e a multiplicação e da propriedade comutativa da multiplicação.

Cálculos	Possíveis respostas dos alunos	Propriedades/relações envolvidas
$24:4=6$	– Porque já sei de cor que 6×4=24.	– Tirar partido da relação inversa entre a divisão e a multiplicação.
$48:4=12$	– Porque $12\times4=48$ ou o número que multiplicado por 4 é igual a 48 é 12 ou como 48 é o dobro de 24 então o número que multiplicado por 4 é igual a 48 tem de ser o dobro de 6, ou seja, 12. – Ou (em relação ao cálculo anterior) se 48 é o dobro de 24 e estamos a dividir pelo mesmo número 4, obtemos um número que é o dobro do anterior, ou seja, 12.	– Tirar partido da relação inversa entre a divisão e a multiplicação. – Se numa multiplicação um dos factores duplica o produto também duplica. Neste caso, como o produto duplicou e um dos factores se manteve o outro factor tem de duplicar também. – Pensando na divisão, se o dividendo duplica e o divisor se mantém, o quociente também duplica.
$48:8=6$	– Porque sei que $6\times8=48$. – Ou (em relação ao cálculo anterior) se estamos a dividir o mesmo número, que é o 48, por outro que é o dobro do anterior, que é o 8, obtemos um número que é metade do anterior, neste caso, 6. – Ou (em relação ao primeiro cálculo) se estamos a dividir 48, que é o dobro de 24, por um número que é o dobro de 4, obtemos um número que é igual ao resultado anterior.	– Tirar partido da relação inversa entre a divisão e a multiplicação. – (Em relação ao cálculo anterior), se numa multiplicação um dos factores duplica e outro passa para metade o produto mantém-se (uso da propriedade associativa). Ou seja, se numa multiplicação um dos factores duplica e o produto se mantém então o outro factor passa para metade. – (Em relação ao primeiro cálculo), se numa multiplicação um dos factores duplica e o produto também duplica então o outro factor mantém-se. – Pensando na divisão (e relacionando com $48:4$), se o dividendo se mantém e o divisor duplica, o quociente passa para metade. – Pensando na divisão, (e relacionando com $24:4$) se o dividendo e o divisor duplicam, o quociente mantém-se.
$96:16=6$	– Porque (em relação ao cálculo anterior 48:8) se estamos a dividir 96, que é o dobro de 48, por 16, que é o dobro de 8, obtemos um número que é igual ao resultado anterior.	– Tirar partido da relação inversa entre a divisão e a multiplicação. – (Em relação ao cálculo anterior), se numa multiplicação um dos factores duplica e o produto também duplica então o outro factor mantém-se. – Pensando na divisão, (e relacionando com 48:8) se o dividendo e o divisor duplicam, o quociente mantém-se.

Cálculos	**Possíveis respostas dos alunos**	**Propriedades/relações envolvidas**
$96:8=12$	– Porque (em relação ao cálculo 48:4) se estamos a dividir 96, que é o dobro de 48, por um número que é o dobro de 4, obtemos um número que é igual ao resultado anterior (ou seja, de 48:4). – Porque (em relação ao cálculo anterior $96:16$) se estamos a dividir o mesmo número, que é o 96, por outro que é metade do anterior, que é o 8, obtemos um número que é o dobro do resultado anterior, neste caso, o 12.	– Tirar partido da relação inversa entre a divisão e a multiplicação. – (Em relação ao cálculo 48:4), se numa multiplicação um dos factores duplica e o produto também duplica então o outro factor mantém-se. – (Em relação ao cálculo anterior), se numa multiplicação um dos factores passa para metade e o produto se mantém então o outro factor duplica. – Pensando na divisão, (e relacionando com 48:4) se o dividendo e o divisor duplicam, o quociente mantém-se. – Pensando na divisão, (e relacionando com 96:16) se o dividendo se mantém e o divisor passa para metade, o quociente duplica.

SEQUÊNCIA 4
-
FRACÇÕES E DECIMAIS

Tópicos	Objectivos específicos	Notas	Tarefas	Organização temporal
Números racionais não negativos **Fracções** **Decimais**	- Compreender fracções com os significados quociente, parte-todo e operador.	- Explorar, por exemplo, situações de partilha equitativa e dinheiro. - Trabalhar com situações de partilha equitativa envolvendo quantidades contínuas.	**À volta das fracções**	Cada situação deve ser explorada em dias diferentes, durante não mais de 20 minutos.
	- Compreender fracções com os significados quociente, parte-todo e operador. - Reconstruir a unidade a partir das suas partes.	- Usar a sobreposição de figuras para comparar as suas áreas[20].	**Dobrar uma folha de papel**	Tarefa para ser explorada em dois dias diferentes. Num dia explorar as três primeiras situações e, no outro, as restantes duas. Em cada dia a exploração deve ocupar cerca de 45 minutos (30+15).
	- Compreender fracções com os significados quociente, parte-todo e operador. - Relacionar diferentes representações dos números racionais não negativos. - Comparar e ordenar números representados na forma decimal.	- Usar valores de referência representados de diferentes formas.	**Marcar um percurso**	Tarefa para ser explorada durante cerca de 55 minutos.
	- Posicionar números representados na forma decimal) numa recta. - Comparar e ordenar números representados na forma decimal. - Adicionar e subtrair com números racionais não negativos na representação decimal.	- Trabalhar as operações a partir de situações do quotidiano. - Usar estratégias de cálculo recorrendo a números de referência.	**Quem está a pensar bem?**	A tarefa é composta por duas partes que devem ser exploradas em dias diferentes. Cada uma dessas partes deve ser explorada durante cerca de 45 minutos.

[20] Nota relativa a objectivos desenvolvidos nos dois primeiros anos associados ao tema Geometria e medida

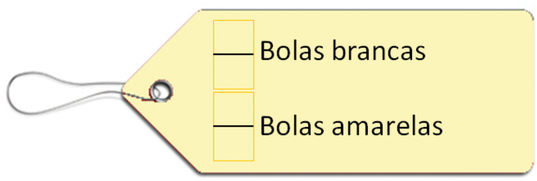
À VOLTA DAS FRACÇÕES

1. A Ana convidou 4 amigas para irem almoçar a um pequeno restaurante no dia dos seus anos. Todas decidiram escolher o prato do dia. No entanto, estavam indecisas sobre como encomendar as doses pois consideram que uma dose dá para duas pessoas. Que diferentes possibilidades teriam de o fazer? Qual das possibilidades é mais económica?

2. O João está a preparar cachorros para o seu lanche e de mais 5 dos seus amigos. Ao ver que só tem uma lata com 8 salsichas, ficou um bocado indeciso. Como é que pode repartir as salsichas de modo a que todos os cachorros fiquem iguais?

3. Quantos portugueses passam as férias na praia? E quantos ficam em casa?

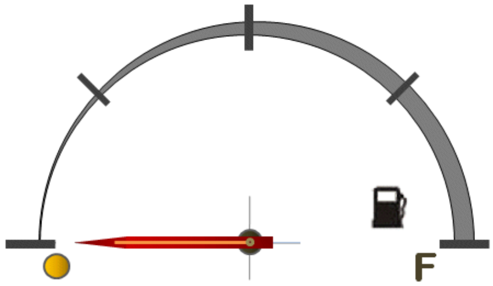
4. Observa a embalagem de bolas de 2 cores. Completa a etiqueta de modo que ela represente, relativamente ao total de bolas, a parte de bolas brancas e a parte de bolas amarelas.



Quantas bolas brancas e amarelas poderá ter uma embalagem que tem a seguinte etiqueta:

5. Quando o depósito está cheio onde fica o ponteiro? E se no depósito estiver apenas ¼ de gasolina?

O Sr. Amílcar tinha o depósito cheio. Foi visitar a filha mais velha e gastou ¼ do depósito. Representa o mostrador do carro quando o Sr. Amílcar chegou a casa da filha mais velha.



Tarefa 1 - À volta das fracções

Materiais

- Fotocópias das folhas da tarefa (cada questão deve ser recortada)

Ideias disponíveis e em desenvolvimento

- Identificar a metade, a quarta parte, a terça parte, a décima parte e outras partes da unidade e representá-las na forma de fracção
- Compreender e usar os operadores: metade, a terça parte, a quarta parte, a quinta parte, etc.

Ideias e procedimentos a desenvolver

- Compreender fracções com os significados quociente, parte-todo e operador
- Interpretar situações que envolvem o uso de fracções
- Relacionar o conceito de múltiplo de um número com o uso de operadores partitivos que transformam o cardinal de um conjunto discreto num número natural

Sugestões para exploração

Nesta tarefa incluem-se cinco contextos diferentes e que envolvem a compreensão de diferentes significados das fracções. As situações apresentadas são relativamente familiares aos alunos, facilitando uma abordagem informal às fracções.

O objectivo desta tarefa é que os alunos compreendem as fracções nos seus diferentes significados. Note-se, no entanto, que não se pretende que os alunos saibam nomear os diferentes significados das fracções.

Sugere-se que cada questão seja explorada em dias diferentes, usando um período de tempo não superior a 20 minutos – 10 de exploração individual e 10 de discussão geral com toda a turma.

Durante a exploração da questão 1 o(a) professor(a) deve incentivar os alunos a analisar todas as possibilidades e a registá-las de um modo organizado. Na fase de discussão com toda a turma sugere-se que seja apresentado um registo sistemático de todas as possibilidades que têm em conta que uma dose dá para duas pessoas idêntico ao seguinte:

½ Doses	Doses	Preço
5	0	5 × 5,5
3	1	3 × 5,5 + 8
1	2	5,5 + 2 × 8

Esta tabela permite facilmente perceber que, tal como acontece na vida real, a opção mais dispendiosa corresponde a pedir um maior número de meias doses.

Podem ainda ser analisadas outras opções que correspondem a não aceitar que uma dose dá sempre para duas pessoas. Naturalmente, uma vez que se está a encomendar mais comida, qualquer opção deste tipo, se torna mais dispendiosa.

A questão 2 envolve uma situação de partilha equitativa e as fracções que se obtêm têm o significado de quociente. Se necessário, o(a) professor(a) pode incentivar os alunos a usarem esquemas que representem o modo de distribuir as salsichas equitativamente pelas 6 sandes. Durante a discussão com toda a turma, a par da análise de algumas das resoluções propostas pelos alunos, podem ser colocadas outras situações de partilha equitativa como, por exemplo, repartir 2 pizas por 3 crianças.

A resolução da questão 3 implica saber o número de habitantes de Portugal. Antes de ser explorada esta questão, os alunos podem, por exemplo, pesquisar este dado em casa. Tendo em conta que o uso de operadores já foi abordado em anos anteriores, esta questão é uma oportunidade para recordar conhecimentos anteriormente adquiridos e trabalhar com 'números grandes'. Na discussão com toda a turma pode ser proposto o uso de outros operadores como 2/5 ou 3/8, referindo, por exemplo, que 2/5 dos portugueses comem diariamente menos do que duas peças de fruta por dia e que 3/8 dos portugueses nunca praticaram desporto.

Na primeira parte da questão 4 apresenta-se uma situação que envolve fracções com o significado parte-todo e, na segunda parte, com o de operador. Neste último caso é interessante verificar que há várias embalagens que podem corresponder à etiqueta apresentada e que o número total de bolas tem de ser um múltiplo de 5. A análise do que se passaria se, na etiqueta figurassem outros operadores como 1/6, 1/7 ou 1/8, pode levar os alunos a generalizar e explicar a relação entre os possíveis operadores e o número total de bolas que cada embalagem pode ter.

A última questão constitui um primeiro passo para a representação de números racionais numa recta, aspecto que irá ser abordado no 4.º ano. A exploração desta questão deve ser fortemente apoiada na observação da imagem apresentada na folha da tarefa. Pode ser interessante pedir a alguns alunos que observem o mostrador do depósito de gasolina dos pais e o desenhem ou fotografem.

Possíveis caminhos a seguir pelos alunos

Na questão 1, para calcular o preço das várias possibilidades de encomenda das doses, alguns alunos podem usar o conhecimento que têm do contexto dinheiro. Por exemplo, para calcular 5 × 5,5 podem:

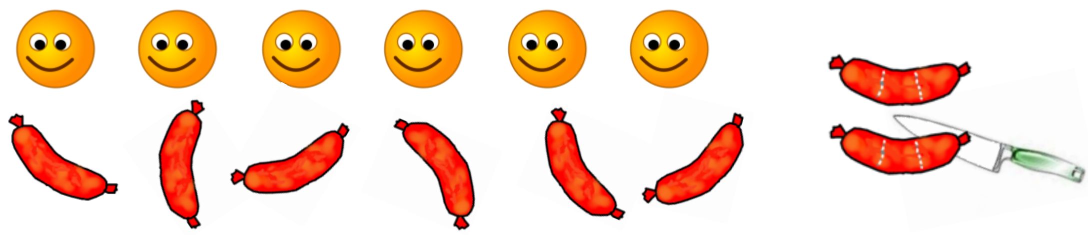
- *Pensar primeiro que 2 × 5,5 euros é igual a 11 euros e depois que*

  11 + 11 = 22 e 22 + 5,5 = 27,5

- *Pensar que 5,5 euros é igual a 5 euros mais 0,5 euros e usar a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição*

  5 × 5 + 5× 0,5 = 25 + 2,5 = 27,5

Na questão 2 é natural que os alunos recorram a representações, tal como a exemplificada, que evidenciem uma partilha equitativa das salsichas.



Na questão 3, os alunos podem usar vários procedimentos. Exemplificamos com a resolução de dois alunos, Ana e Mário.

- *Ana procurou em casa e encontrou a informação de que a população portuguesa era constituída por 10 627 250 pessoas. Usou esse número e determinou 1/5 do seu valor pensando:*

  1/5 → divido por 5

  10 627 250 : 5 = 2 125 450 (utiliza a calculadora).

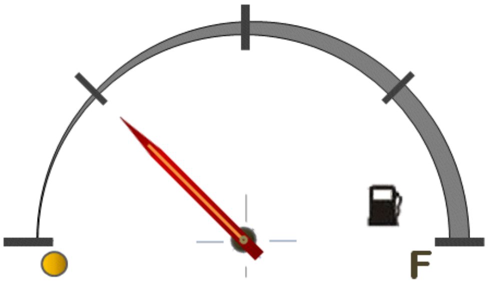
- *Mário usou o número 10 500 000, ou seja, um valor aproximado de 10 627 250, que lhe permitia, mentalmente, realizar o cálculo de 1/5, pensando na divisão por 5, por partes:*

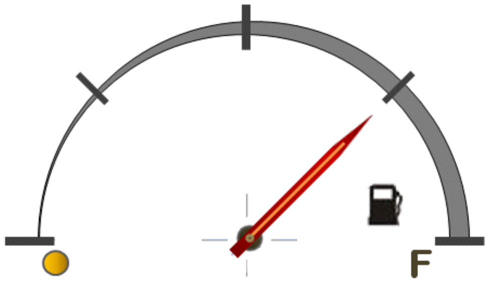
  10 000 000 a dividir por 5 é 2 000 000

  500 000 a dividir por 5 é 100 000

  logo, um quinto de 10 500 000 é igual a 2 100 000.

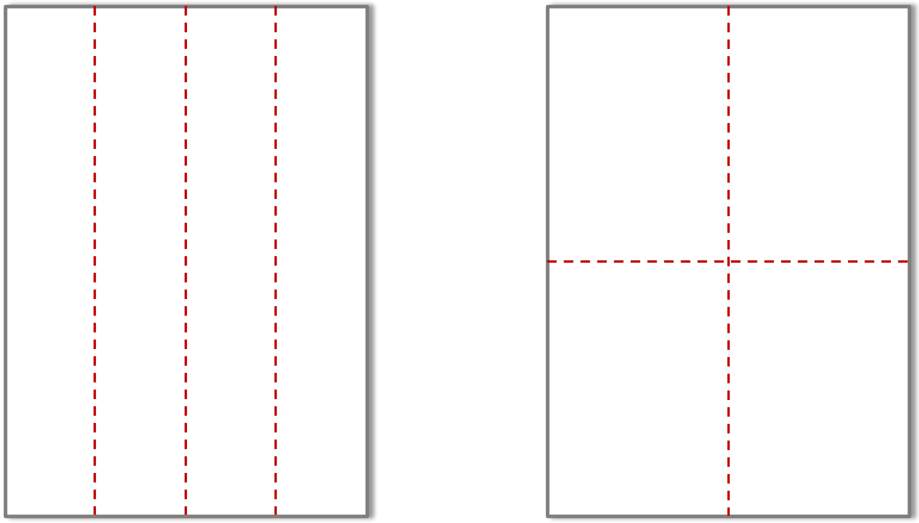
Na última questão, alguns alunos podem confundir o que significa ter ¼ do depósito com gastar ¼ do depósito que estava cheio:





Dobrar uma folha de papel

1. Fazendo dobragens sucessivas, pode-se dividir facilmente uma folha de papel em partes iguais. As figuras seguintes ilustram dobragens que permitem dividir uma folha de papel em 4 partes iguais.



a) Pinta de amarelo $\frac{1}{2}$ e de verde $\frac{1}{4}$ de cada folha de papel.

b) Recorta $\frac{1}{4}$ de cada folha. Mostra que têm a mesma área.

2. Catarina afirma que, ao desdobrar uma folha, ficou com 12 partes iguais.

a) Usando uma folha de papel explica como é que a Catarina pode ter feito as dobragens.

Quantas dobragens pode ter feito a Catarina?

b) Pinta de verde $\frac{1}{12}$ da folha, de cor de rosa $\frac{3}{12}$ e de castanho $\frac{6}{12}$.

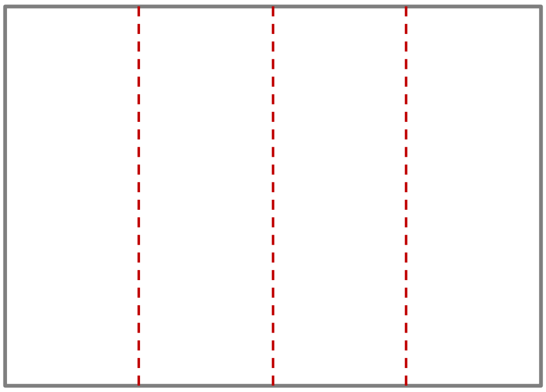
DOBRAR UMA FOLHA DE PAPEL

3.

a) Dobra uma folha de papel em 4 partes iguais, como na figura.

b) Pinta de amarelo $\frac{1}{4}$ da folha e de vermelho $\frac{3}{4}$.

c) Dobra do mesmo modo uma outra folha de papel igual em 8 partes iguais e pinta de azul $\frac{2}{8}$ da folha e de verde $\frac{4}{8}$.



d) Compara a folha que está dividida em 4 partes iguais com a que está dividida em 8 partes. Completa usando os símbolos =, < ou >:

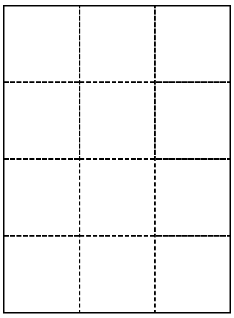
$\frac{1}{2}$ ... $\frac{4}{8}$ $\quad$ $\frac{3}{8}$ ... $\frac{1}{4}$ $\quad$ $\frac{2}{8}$ ... $\frac{1}{4}$ $\quad$ $\frac{5}{8}$ ... $\frac{3}{4}$

e) Observa as folhas dobradas em 4 e em 8 partes iguais e completa as afirmações seguintes de modo que sejam verdadeiras:

$\frac{1}{2}$ é o dobro de ...

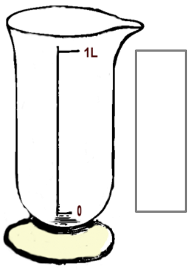
$\frac{1}{8}$ é metade de ...

4. A figura seguinte representa uma de 8 partes iguais de uma folha, depois de ser dobrada. Desenha a folha inicial em papel quadriculado.



Dobrar uma folha de papel

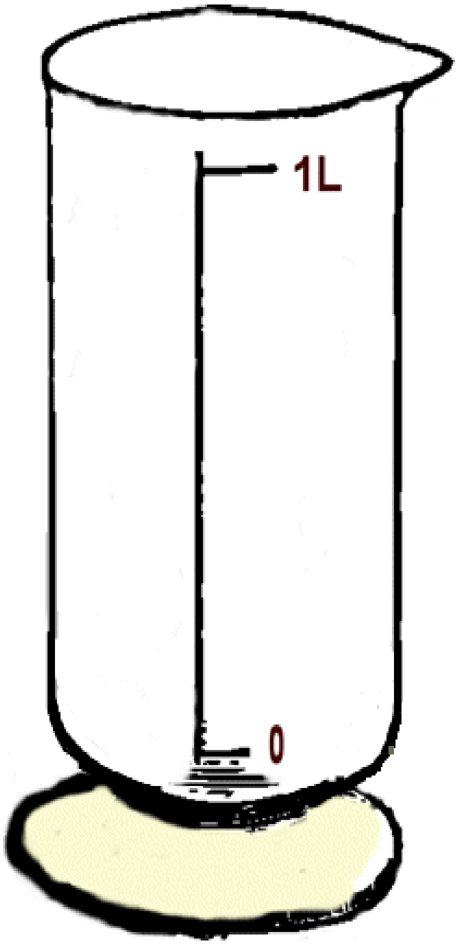
5. Recorta uma tira de papel igual à da figura. Dobra-a de modo a que seja possível medir, usando o copo medidor, os ingredientes para um batido de morango.



$\frac{1}{2}$ de litro de leite

$\frac{2}{3}$ de litro de morangos esmagados

$\frac{1}{6}$ de litro de açúcar



Tarefa 2 - Dobrar uma folha de papel[21]

Materiais

- Fotocópias das folhas da tarefa
- Folhas de papel todas iguais para dobrar
- Tesouras e lápis de cor

Ideias disponíveis e em desenvolvimento

- Identificar a metade, a quarta parte, a terça parte, a décima parte e outras partes da unidade e representá-las na forma de fracção[22]
- Compreender e usar os operadores: dobro, triplo, quádruplo e quíntuplo e relacioná-los, respectivamente com a metade, a terça parte, a quarta parte e a quinta parte[23]
- Compreender a noção de área[24]
- Usar a sobreposição de figuras para comparar as suas áreas[25]

Ideias e procedimentos a desenvolver

- Compreender fracções com os significados parte-todo e operador
- Reconstruir a unidade a partir das suas partes
- Comparar números representados na forma de fracção
- Associar as dobragens de uma tira de papel à representação de números racionais numa recta (no caso concreto da graduação de um recipiente, marcando números como ½, 2/3 e 1/6

[21] Esta tarefa foi inspirada em Turner, E. E., Junk, D. & Empson, S. B. (2007). The power of Paper-Folding Tasks: Supporting Multiplicative Thinking and Rich Mathematical Discussion. *Teaching Children Mathematics, 13* (6), 322-329.
[22] Objectivo desenvolvido nos dois primeiros anos associado ao tópico Números racionais não negativos
[23] Objectivo desenvolvido nos dois primeiros anos associado ao tópico Números racionais não negativos
[24] Objectivo desenvolvido nos dois primeiros anos associado ao tema Geometria e medida
[25] Objectivo desenvolvido nos dois primeiros anos associado ao tema Geometria e medida

Sugestões para exploração

Esta tarefa centra-se na exploração de um contexto de dobragens de folhas de papel para trabalhar diferentes aspectos relativos aos números racionais, em particular à sua representação na forma de fracção. Na primeira parte inicia-se uma exploração ligada a fracções com o significado parte-todo e realça-se a ideia de que as mesmas partes de folhas de papel iguais, mesmo podendo não se sobrepor, têm a mesma área.

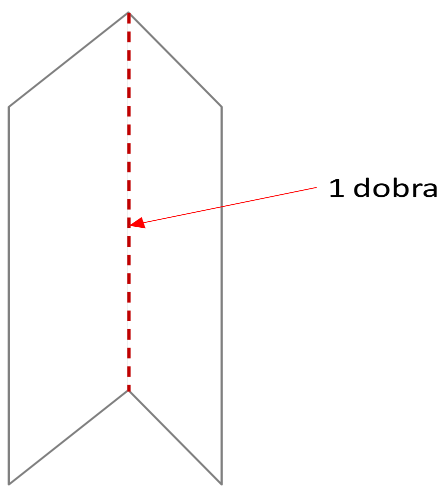
Embora sem ser este o foco, na segunda questão da tarefa, abordam-se as possíveis relações entre o número de dobragens de uma folha de papel e o número de partes em que ela fica igualmente dividida.

Na terceira questão continua a trabalhar-se o sentido parte-todo e comparam-se relações de grandeza entre algumas fracções.

Na quarta questão usa-se o contexto de dobragens de uma folha de papel para reconstruir a unidade a partir de uma das suas partes.

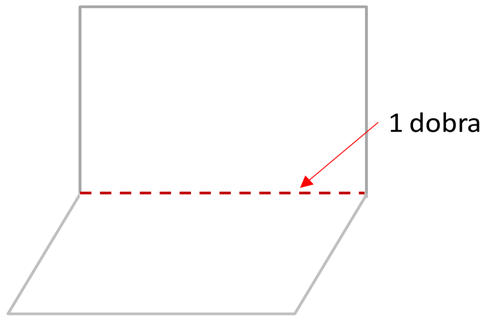
Finalmente, na quinta e última questão, usam-se dobragens de uma tira de papel para graduar um recipiente.

Sugere-se que esta tarefa seja explorada em dias diferentes. No primeiro dia deve ser proposta a realização das três primeiras questões e, num segundo dia, as restantes duas. Em cada dia, a uma fase de exploração individual ou a pares com a duração aproximada de 30 minutos, deve seguir-se uma outra, de discussão com toda a turma, com a duração de cerca de 15 minutos.



No primeiro dia em que é apresentada esta tarefa o(a) professor(a) deve dedicar cerca de 5 minutos à clarificação do que está envolvido neste contexto em que se exploram dobragens de uma folha de papel. Dialogando com os alunos e solicitando a sua ajuda, pode exemplificar diferentes formas de dobrar uma folha de papel em partes iguais, assinalando cada uma das partes em que ela foi dobrada e realçando o que se entende por dobragem. Pode, por exemplo, começar por dobrar a folha de papel ao meio, assinalando a que corresponde metade da folha e explicitando que foi feita *uma* dobragem. De modo a tornar visível a dobra realizada o(a) professor(a) pode assinalá-la com um marcador.

Pode, em seguida, pedir a um dos alunos que, usando uma folha de papel igual, a dobre ao meio de um modo diferente e assinale a dobra com o marcador.

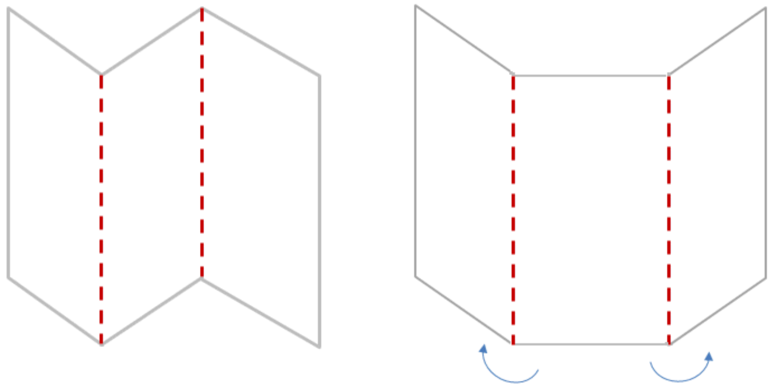


A observação do que se obteve com estas dobragens diferentes, permite perceber que há várias formas de dobrar uma folha em 2 partes iguais e compreender que metade de uma folha pode corresponder a rectângulos com dimensões diferentes mas equivalentes. A confirmação da equivalência dos rectângulos, ou seja, da igualdade das áreas de cada metade da folha, pode ser feita por comparação a partir do corte de cada metade:

Depois desta introdução, cada aluno, individualmente ou em pares, inicia a resolução das questões incluídas em 1, 2 e 3.

A primeira questão corresponde ao que foi feito na introdução da tarefa, só que se dobra a folha em 4 partes iguais (em vez de 2). No entanto, alguns alunos podem ficar confusos se, ao pintar ½ da folha de amarelo e ¼ dessa mesma folha de verde, as cores ficarem sobrepostas. O(a) professor(a) pode esclarecer que, desde que percebam a que corresponde ½ e ¼ da folha, a sobreposição de cores não tem qualquer problema. No entanto, os alunos podem optar por pintar, procurando que não haja sobreposição, se considerarem que isso é menos confuso. Esta mesma indicação é válida para todas as questões em que se pede para pintar diferentes partes de uma folha de papel.

No segundo grupo de questões é natural que muitos alunos tenham dificuldade em dobrar uma folha em 12 partes iguais pois, para o conseguirem, é melhor partir de uma dobragem inicial em 3 partes iguais. De facto, se se pensar no tipo de dobragens feitas até aqui, cada dobragem duplica o número de partes em que a folha fica dividida: 1 dobragem – 2 partes; 2 dobragens – 4 partes; 3 dobragens – 8 partes; 4 dobragens – 16 partes, etc. Logo, com este tipo de dobragens não é possível obter 12 partes iguais. Para o conseguir é necessário ter uma fase em que divisão não seja em 2, mas sim em 3 partes iguais. Assim, os alunos devem procurar perceber como podem dividir, por dobragem, uma folha sem ser em 2 partes iguais. A sugestão do modo como se pode dobrar uma folha para colocar dentro de um envelope pode ajudar alguns alunos. No entanto, se esta divisão levantar muitas dúvidas, o(a) professo(a) pode exemplificar o que pode ser feito para dobrar uma folha de papel em 3 partes iguais:



Durante a discussão com toda a turma o(a) professor(a) deve partir das diferentes resoluções dos alunos para destacar as seguintes ideias:

- *Uma determinada parte de duas folhas de papel iguais, tem sempre igual área. Por exemplo, ¼ de uma folha pode ser obtido a partir de diferentes formas de dobrar, o que origina quartos com dimensões diferentes mas que têm a mesma área.*

- *A área de uma determinada parte de uma folha depende da dimensão inicial dessa folha. Por exemplo, ¼ de uma folha de papel de cenário tem uma área bastante superior a ¼ de uma folha de papel A4.*

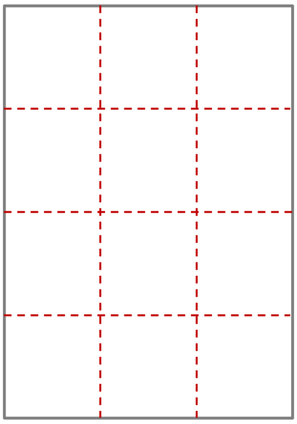
É igualmente importante que a correcção das relações de ordem estabelecidas entre os números fraccionários se apoie nas dobragens realizadas. Assim, para justificar que ½ é igual a 4/8, os alunos devem indicar concretamente a que corresponde ½ da folha e 4/8 da folha, para justificar a igualdade.

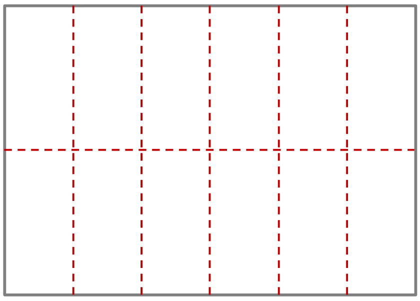
Durante a exploração individual ou a pares da segunda parte da tarefa (questões 4 e 5), o(a) professor(a) pode explicitar que a figura representada em 4 corresponde a dobragens sucessivas e que a solução desta questão não é única, uma vez que há várias folhas diferentes que, dobradas em 6 partes iguais, podem originar a figura desenhada. No entanto, uma verdadeira exploração deste aspecto deve ser remetida para a discussão em grande grupo, em que se comparam respostas diferentes e as folhas iniciais que originaram, através de 8 dobragens sucessivas, a figura representada.

Na questão 5, deve ser necessário explicitar o modo como se pode fazer corresponder a tira de papel dobrada com a frente do copo medidor, de maneira a conseguir medir os ingredientes necessários para o batido. Para alguns alunos pode ser importante clarificar que a dobragem da tira deve permitir marcar 1/6, 2/3 e ½. Sendo assim, será de dividir a tira em 4 partes? A sugestão de, depois de dobrada, colar a tira no copo medidor, com os vincos correspondentes às dobragens efectuadas, pode ajudar alguns alunos a perceber como devem, efectivamente, marcar a graduação do copo.

Possíveis caminhos a seguir pelos alunos

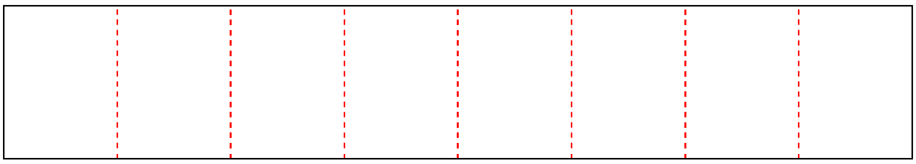
Na questão 2, alguns alunos optam por dobrar em 3 partes iguais ao longo do comprimento e em 4 partes iguais ao longo da largura. Outros optam por dobrar em 2 partes iguais ao longo do comprimento e em 6 partes iguais ao longo da largura da folha inicial. Podem obter-se as seguintes dobragens que Catarina poderia ter feito:



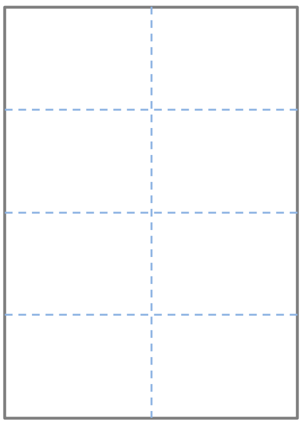


Na questão 4 podem surgir respostas como as de Carolina, Ana e João.

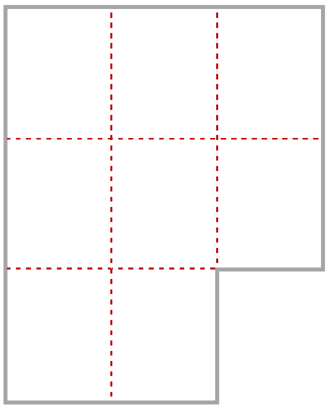
Resposta de Carolina



Resposta de Ana



Resposta de João



A resposta incorrecta de João parece corresponder ao facto de ter esquecido que deveria obter uma folha, depois de desdobrada. As respostas de Ana e Carolina são exemplos de diferentes formas de dobrar uma folha. Note-se que são diferentes também as folhas que cada um obtém.

MARCAR UM PERCURSO

Na escola de Ana vai realizar-se uma grande corrida e é a sua turma que está responsável pela selecção e marcação do percurso. Depois de analisarem várias hipóteses, decidiram que a corrida seria numa mata em que existem vários percursos possíveis. Optaram pelo que tem 2 km de comprimento.

Para que os concorrentes disponham de informação que lhes permita dosear o esforço, consideram que devem colocar ao longo do percurso placas, de 250 metros em 250 metros.

O grupo de Ana propôs o seguinte tipo de placa:

O grupo de Luís apresentou a seguinte proposta

Depois de alguma discussão, decidiu-se que as placas devem representar o que falta percorrer em quilómetros e na forma de fracção, assinalando a parte que falta percorrer relativamente ao percurso total. Por exemplo, depois de percorrer 750 metros os corredores verão a seguinte placa:

Representa no teu caderno as restantes 6 placas que a turma de Ana deve construir e indica em que local do percurso deve ser colocada cada uma delas.

Tarefa 3 – Marcar um percurso

Materiais

- Fotocópias da folha da tarefa

Ideias disponíveis e em desenvolvimento

- Compreender fracções com os significados quociente, parte-todo e operador
- Ler e escrever números na sua representação decimal

Ideias e procedimentos a desenvolver

- Compreender fracções com o significado parte-todo
- Relacionar diferentes representações dos números racionais não negativos
- Comparar e ordenar números representados na forma decimal

Sugestões para exploração

O contexto desta tarefa foi pensado de modo a favorecer o uso intuitivo dos números racionais na sua representação decimal e na de fracção. Sugere-se que após uma pequena introdução geral da tarefa, ela seja explorada em pequenos grupos, num total de tempo de 30 minutos. A discussão geral com toda a turma não deve ultrapassar 25 minutos.

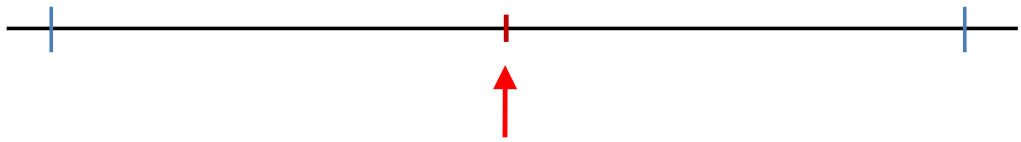
Na parte inicial é importante clarificar o contexto da tarefa, criando condições para que os alunos possam explorá-la por si sós. Antes do trabalho em pequenos grupos o(a) professor(a) deve seleccionar cuidadosamente os aspectos que devem ser clarificados assim como o modo de o fazer. De um modo geral há dois aspectos cuja compreensão é determinante para conseguir interpretar e resolver a tarefa: perceber a diferença entre as placas que assinalam o espaço percorrido e as que assinalam o que falta percorrer; perceber a que correspondem os valores numéricos que estão em cada tipo de placa.

Para clarificar estes dois aspectos sugere-se que o(a) professor(a) use a placa seleccionada pela turma da Ana e do Luís, colocando questões como as seguintes:

* *Quando se vê esta placa, quanto já foi percorrido? Nesta altura do percurso, como seria a placa que corresponde à proposta de Ana?*

* *O que representa, na placa seleccionada, 1,250 km? E 5/8?*

Se depois da análise destas questões persistirem muitas dúvidas o(a) professor(a) pode representar no quadro o percurso, assinalando metade dele e explicitando os valores que devem ser colocados na placa que será colocada neste local.



Falta percorrer 1 km. Falta percorrer $\frac{1}{2}$

Deste modo, apresenta-se à partida uma representação que facilita a resolução desta tarefa. No entanto, se depois da análise das questões colocadas pelo(a) professor(a), o enunciado for claro para os alunos, sugere-se que se deixe para a fase do trabalho em grupo a procura de representações que facilitam a resolução da tarefa.

Na parte de discussão com toda a turma devem ser vincados os conhecimentos que foram fundamentais para resolver a tarefa. Assim, quando se pensa que falta percorrer 5/8 de um percurso, isso dá a indicação de que num percurso dividido em 8 partes iguais, faltam percorrer 5 delas. Dá também a indicação que será bom "olhar" para o percurso e dividi-lo em 8 partes iguais. Para saber a que distância corresponde cada uma dessas partes basta dividir 2 km por 8, ou seja 250 m (0,250 km).

Note-se que implicitamente alguns alunos podem pensar que 1/8 do percurso tem de coincidir necessariamente com a distância entre dois marcos. Por isso, poderá ser importante propor a análise de uma situação semelhante, mas em que não seja verdadeira essa relação entre a parte indicada em que o percurso é dividido e a distância a que se pretende que fiquem os marcos de sinalização. Para isso, basta chamar a atenção de que se podia ter partido da indicação de que faltava percorrer ¼ do percurso e que a ¼ do percurso não correspondem 250 metros mas sim 500.

Na fase de exploração com toda a turma o(a) professor(a) pode ainda propor a marcação de percursos com comprimentos diferentes e com a exigência de que a distância entre os marcos seja diferente. Sugere-se, por exemplo:

* *marcos de 500 em 500 metros num percurso com 5 km de comprimento;*

* *marcos de 100 em 100 metros num percurso de 2 km de comprimento.*

Durante os 45 minutos reservados para a exploração desta tarefa não haverá tempo para analisar este tipo de possibilidades diferentes que podem, no entanto, ser propostas para casa ou num outro momento de trabalho na aula.

Possíveis caminhos a seguir pelos alunos

Alguns alunos, influenciados pelo que se pede – representar no caderno as restantes 7 placas - pensam sequencialmente nas placas e não usam um modelo que permita a visualização de uma divisão em 8 partes iguais. Estes alunos apresentam respostas como as que indicamos em seguida para as 4 primeiras placas:

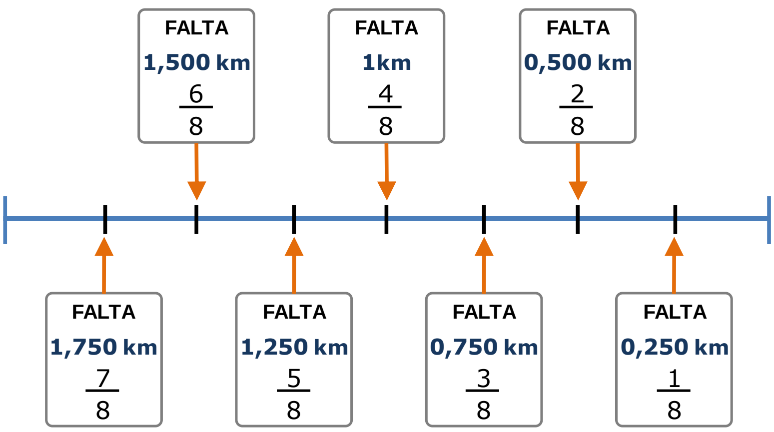
1.ª placa → depois de 250 metros — FALTA **1,750 km** $\frac{7}{8}$

2.ª placa → depois de 500 metros — FALTA **1,500 km** $\frac{6}{8}$

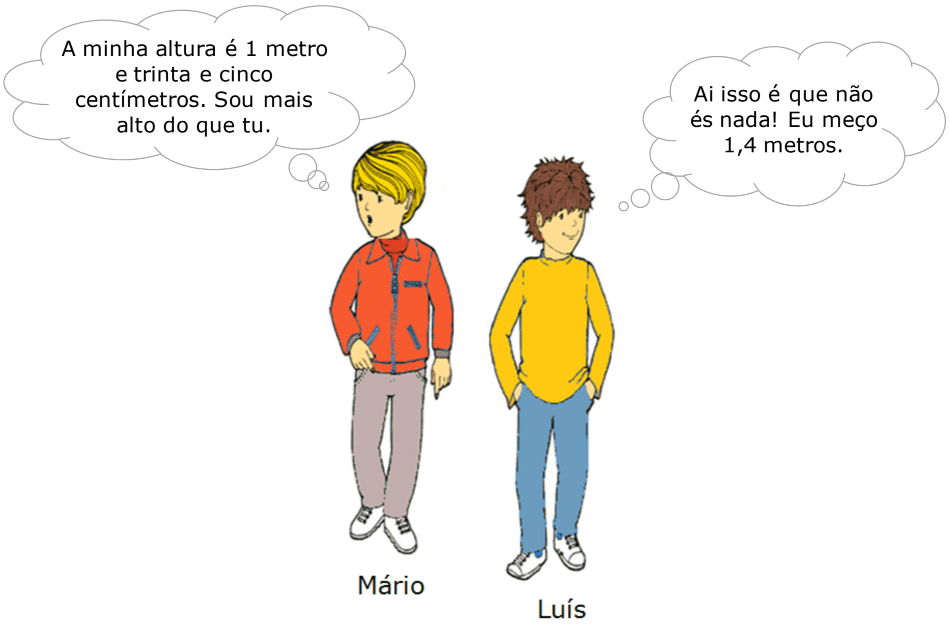
3.ª placa → depois de 750 metros — FALTA **1,250 km** $\frac{5}{8}$

4ª placa → depois de 1000 metros — FALTA **1 km** $\frac{4}{8}$ — FALTA **1 km** $\frac{1}{2}$

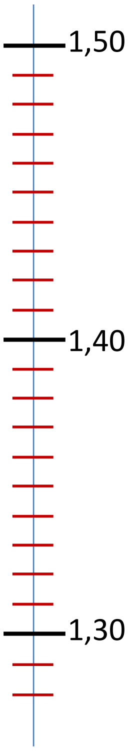
Outros alunos "marcam" as placas num segmento de recta dividido em 8 partes iguais:



QUEM ESTÁ A PENSAR BEM?



1.



Onde é que marcarias a altura do Mário e do Luís?

Quem é o mais alto?

A Raquel é mais baixa que o Luís mas mais alta que o Mário. Rodeia com um círculo a medida ou as medidas que podem corresponder à altura da Raquel.

1,5 m   1,37 m   1,47 m   1,29 m   1,38 m   1,3 m

Usa a marcação ao lado para confirmares a tua resposta.

QUEM ESTÁ A PENSAR BEM?

2. Quatro amigos – Raquel, Mário, Ana e Luís, não estão de acordo relativamente ao dinheiro que cada um tem.

Quem está a pensar bem?

Determina, aproximadamente, o total de dinheiro que têm os quatro amigos.

Qual é a diferença entre o dinheiro de Mário e o de Ana? E entre o de Mário e o de Raquel?

Tarefa 4 - Quem está a pensar bem?

Materiais

- Fotocópias das folhas da tarefa

Ideias disponíveis e em desenvolvimento

- Comparar e ordenar medidas de diversas grandezas[26]
- Resolver problemas envolvendo dinheiro[27]
- Medir comprimentos, registar e comparar os valores obtidos

Ideias e procedimentos a desenvolver

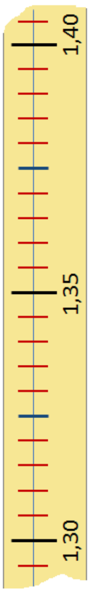
- Posicionar números racionais não negativos (neste caso, números representados na forma decimal) numa recta
- Comparar e ordenar números representados na forma decimal
- Adicionar e subtrair com números racionais não negativos na representação decimal
- Identificar estratégias para determinar o valor aproximado de uma soma cujas parcelas são números decimais

Sugestões para exploração

Nesta tarefa explora-se a comparação de alturas e o uso de dinheiro para trabalhar com os números decimais. As sugestões, que se apresentam para a sua exploração, partem do princípio que é importante focar a manipulação intuitiva e contextualizada dos números decimais, antes de iniciar uma manipulação abstracta. Por isso, todas as sugestões que se apresentam incidem na análise de contextos que "dão sentido" a estes números e que permitem ancorar o estabelecimento de relações numéricas que apoiam o cálculo.

[26] Objectivo a ser desenvolvido nos 3.º e 4.º anos associado ao tema Geometria e medida.
[27] Objectivo desenvolvido nos dois primeiros anos associado ao tema Geometria e medida.

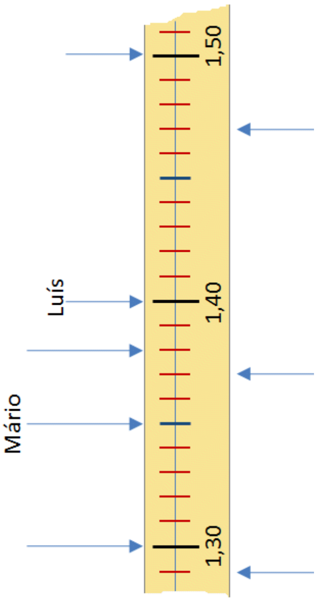
As questões incluídas em 1 e em 2 devem ser exploradas em dias diferentes. Sugere-se que em cada dia se proponha uma exploração individual ou em grupos de dois alunos com a duração máxima 15 minutos para 1 e 20 minutos para 2, a que se segue uma discussão com toda a turma de não mais de 30 minutos. Esta discussão deve clarificar as dúvidas que forem surgindo e permitir focar ideias e procedimentos centrais para a compreensão dos números decimais.



A primeira questão que pode levantar dúvidas e respostas incorrectas diz respeito ao modo como se poderá representar a altura de Mário que, contrariamente com o que acontece com a de Luís, não está representada por meio de um numeral decimal. Como a altura de Luís está representada por 1,4 m, alguns alunos podem considerar que Mário é o mais alto pois lêem a altura de Luís como 1 metro e 4 centímetros em vez de 1 metro e 40 centímetros. Na discussão com toda a turma é importante conseguir dar sentido às alturas indicadas, analisando os números numa relação com a medição de alturas.

A indicação da altura de Raquel deve, igualmente, ser explicitada a partir da marcação das alturas indicadas.

Deste modo, é o "acto de medir" uma altura que dá significado a cada um dos números e que suporta a análise de questões como as seguintes:



- *Se a Raquel tivesse 1,37 metros de altura, quanto media a mais do que o Mário? E a menos que o Luís?*
- *Qual poderá ser a altura da Joana que é mais alta que o Luís mas mede menos do que 1,48 m?*

O(a) professor(a) pode ter uma fita métrica colada verticalmente numa parede para melhor contextualizar a medição das alturas. Em alternativa, pode simular com uma fita métrica, que está inicialmente enrolada, a medição das alturas a que se vai fazendo referência. Neste caso, se usar uma fita métrica do tipo existente no mercado, não irá ter os números representados na forma decimal uma vez que o comprimento está, habitualmente, só assinado em centímetros. Em qualquer dos casos, os alunos devem perceber a relação entre a representação decimal dos números e a sua localização na fita métrica, pelo que podem, se necessário, ser colocadas mais questões do tipo das anteriores.

Na exploração desta tarefa deve igualmente dar-se atenção ao modo como se lêem os números:

1,35 m é um metro e trinta e cinco centímetros

1,4 m é um metro e quatro decímetros ou um metro e quarenta centímetros

As questões incluídas em 2 devem, igualmente, ser analisadas relacionando-as com o contexto apresentado, o dinheiro. Uma vez que se trata de um contexto mais familiar e que é explorado desde o 1.º ano, não deve ser privilegiado o uso de material concreto – moedas e notas. Ao nível da resolução individual ou em pares, caso haja alunos que ainda têm dificuldade em pensar sem o suporte de material concreto, pode ser disponibilizado o seu uso. No entanto, é de incentivar que a maior parte dos alunos recorra a esquemas ou use a recta não graduada.

A análise das afirmações de Mário, Raquel, Ana e Luís pode ser um pouco confusa. Nem sempre se referem ao mesmo – uns referem que são quem tem mais dinheiro, outro que são quem tem menos – e as quantias de dinheiro são muito próximas. Por isso, pode ser facilitador, para alguns alunos, sugerir que comecem por ver quem tem mais e menos dinheiro e, só depois, ir verificar a veracidade das afirmações de cada um.

O cálculo aproximado, focado numa das questões colocadas em 2, é um tema que se reveste de alguma complexidade. Embora envolvendo ideias que não são complicadas, o(a) professor(a) tem de ir estabelecendo critérios que clarifiquem que calcular aproximadamente exige pensar e não é uma actividade em que se "adivinha" um resultado. Usando as propostas que vai fazendo, deve ir clarificando os seguintes aspectos:

i) *Calcular aproximadamente exige arredondamentos que permitam usar números mais "fáceis". É natural arredondar os números decimais para um inteiro próximo ou os números inteiros para os múltiplos de 5.*

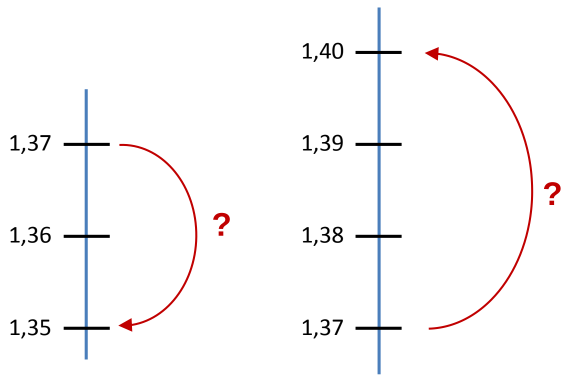
ii) *O contexto deve influenciar a decisão sobre os vários arredondamentos "aceitáveis". Por exemplo, num contexto em que se comparam áreas de vários países é natural arredondar os valores ao km^2, desprezando os seus submúltiplos. Num contexto em que se comparam salários mensais é natural arredondar os valores às centenas de euros.*

iii) *As operações que se pretendem realizar podem, igualmente, influenciar o arredondamento a fazer. Se se quer calcular aproximadamente o valor de 61,2+15,5, pode-se optar por calcular 61+16. No entanto, se se pretender saber aproximadamente o valor de 61,2:15,5, é natural optar por calcular 60:15, pois trata-se de um quociente de referência (os alunos podem recorrer, por exemplo, ao facto de saberem que há 4 quartos de hora numa hora).*

Estes aspectos devem sempre ser explicitados a propósito do processo de pensar em determinado problema e não como regras gerais que os alunos devem registar e decorar. No caso do cálculo aproximado do total de dinheiro de Mário, Raquel, Ana e Luís sobressaem os aspectos referidos em i) e ii). Num contexto de dinheiro "à volta de 55 euros" podem desprezar-se os cêntimos e usar números inteiros. Assim, podem surgir respostas que correspondem a calcular 4×55 ou 3×55+56.

Possíveis caminhos a seguir pelos alunos

Uma vez que o enunciado apresentado em 1 concretiza a marcação de alturas numa fita métrica vertical, é natural que as respostas às questões que o(a) professor(a) coloca durante a discussão também usem este suporte. Assim, para responder à questão "Se a Raquel tivesse 1,37 metros de altura, quanto media a mais do que o Mário? E a menos que o Luís?", os alunos podem representar no seu caderno esquemas como o seguinte:



No entanto, alguns alunos podem já não precisar de suportar o seu raciocínio com o desenho de uma fita métrica, conseguindo raciocinar a partir da manipulação dos números:

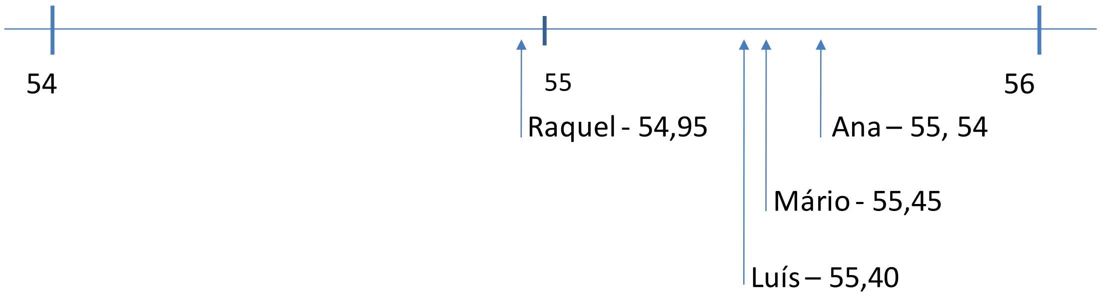
Mário				Raquel
1,35	←	1,36	←	**1,37**
	1 cm		1 cm	

A Raquel mede mais 2 cm que o Mário

Raquel						Luís
1,37	→	1,38	→	1,39	→	1,40
	1cm		1cm		1cm	

A Raquel tem menos 3 cm que o Luís

Na parte 2 da tarefa alguns alunos podem posicionar na recta não graduada os valores numéricos correspondentes ao dinheiro que cada criança tem e, a partir daí, analisar a veracidade de cada afirmação:



Para calcular o valor aproximado do total de dinheiro que têm os quatro amigos, alguns alunos tomam 55 como uma boa aproximação do dinheiro de cada amigo:

Todos têm perto de 55 euros. Fica $4 \times 55 = 4 \times 50 + 4 \times 5 = 200 + 20 = 220$

Outros alunos podem aproximar o dinheiro de Ana a 56:

Luís, Raquel e Mário → 55

$$3\times55=3\times50+3\times5=150+15=165$$

Ana → 56

$$165+56=221$$